

Clases de Mecánica Clásica

por Rodrigo Medina A.
Centro de Física IVIC, Departamento de Física USB

Versión preliminar, 20/5/2011 a las 20:25

Reproducción libre (por ahora)

Prólogo

Estas Clases de Mecánica Clásica cubren los contenidos de esta materia correspondientes a un primer curso de Física para ciencias e ingeniería. Hemos tratado en este texto de exponer la teoría de una manera completa pero concisa. El énfasis está en la discusión de los conceptos y leyes fundamentales, su origen y su validez actual. Hemos tratado de demostrar todos los resultados de la manera más general a partir de las leyes fundamentales. En cada capítulo hemos estudiado en detalle algún ejemplo representativo en el que se muestre como se analiza un sistema usando las leyes y conceptos introducidos.

Dada la importancia que tienen los vectores para toda la Física, en el capítulo 2 se presenta por extenso la teoría matemática de los vectores geométricos.

Se supone que el estudiante ya está familiarizado con el concepto de derivada, y que está tomando paralelamente un curso de integrales. En el capítulo 3 sobre cinemática se da una definición intuitiva y se presenta las principales propiedades de las integrales. Para los que no hayan tomado un curso de derivadas en el apéndice I se trata intuitivamente el tema.

Hemos tratado de mantener la matemática al mínimo necesario, sin embargo cuando es indispensable para la comprensión de la física no hemos hesitado en introducir (dando una explicación intuitiva) conceptos matemáticos que se estudian usualmente en cursos más avanzados de los que está tomando el estudiante. Por ejemplo en capítulo 5 sobre trabajo y energía se introducen los conceptos de integral de camino y gradiente, y en el capítulo 10 sobre la dinámica del cuerpo rígido se introduce el concepto de tensor momento de inercia.

Algo de lo que carece este texto es de problemas y ejercicios, pero para eso hay una extensa literatura.

RM

Capítulo 1

Introducción a la Física

La Física y las otras ciencias

La Física estudia las leyes fundamentales de la Naturaleza, por eso está relacionada estrechamente con las otras ciencias naturales y con la tecnología. El siguiente esquema nos da una idea de la relación entre las diferentes ramas del saber o ciencias.

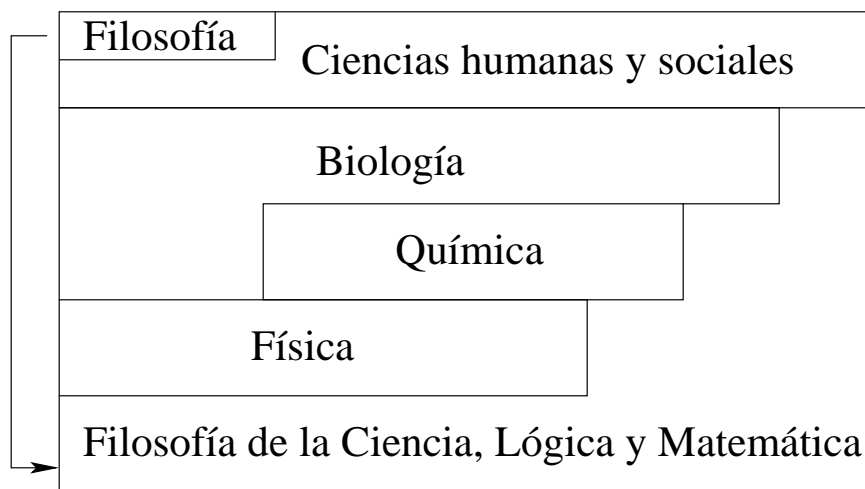


Fig. 1.1 Relación entre las ciencias

En la base están la Filosofía de la Ciencia, la Lógica y la Matemática, que nos dicen como se hace ciencia, como se razona correctamente (Lógica) y nos proporciona un potentísimo método para hacer razonamientos muy complejos (Matemática). La Matemática, aunque tiene características semejantes, no es una ciencia natural. El origen de sus conceptos no es la naturaleza sino que es convencional. Una teoría matemática típica está formada por **conceptos primitivos**, que se supone conocidos, y **conceptos derivados**, que se obtienen de los primitivos mediante **definiciones**. Tenemos luego los **axiomas**, que son proposiciones que se asumen como verdaderas *a priori*, esto es desde un principio y sin demostración. Los axiomas deben ser consistentes, o sea que no deben contradecirse entre sí. Mediante deducción se demuestra la validez de otras proposiciones que son los **teoremas** de la teoría. Algunas veces es posible introducir un nuevo axioma a una teoría preexistente, axioma que debe ser independiente y consistente con los otros. De esa manera se obtiene una teoría particular de una más general.

Sobre la Matemática tenemos la Física que estudia los componentes básicos de la naturaleza y las leyes que satisfacen. Las leyes físicas típicas se presentan como expresiones matemáticas, y las teorías físicas principales tienen la forma de teorías matemáticas; por eso hay una relación muy estrecha entre Física y Matemática. Grandes físicos fueron también grandes matemáticos (Arquímides, Newton, Gauss ...). Ha sido frecuente que problemas

planteados por la Física hayan generado nuevas ramas de la Matemática y viceversa que nuevas ramas de la Matemática hayan encontrado su aplicación en Física.

Las leyes que determinan como se forman, que propiedades tienen y como reaccionan átomos y moléculas (o sea las leyes fundamentales de la Química) tienen su explicación en la Física. La estructura y el funcionamiento de los seres vivos tienen su explicación en la Física y la Química. Por otra parte el Hombre es un ser vivo y por lo tanto las ciencias humanas y sociales (Psicología, Sociología, Antropología, etc.) se soportan en la Biología. Todas las ciencias naturales y sociales se soportan en la Matemática, por ejemplo la Estadística es fundamental en los estudios sociológicos. La Filosofía es una ciencia humana, por lo que en esta discusión terminamos en donde empezamos.

El hecho de que las leyes fundamentales de la Química tengan su explicación en la Física no significa que la Química se reduzca a la Física. En cada nivel de complejidad aparecen las llamadas propiedades emergentes. Cada ciencia natural tiene sus propias leyes y su propio cuerpo de conocimiento empírico. Es prácticamente imposible predecir en base a las leyes físicas la inmensa variedad de la Química Orgánica, así como esta última no puede predecir la existencia, digamos, de un sapo.

Las otras ciencias naturales como la Astrofísica, Geofísica, Ecología, que por la complejidad de los sistemas que estudian no son consideradas básicas, se apoyan en todas las ciencias básicas. Lo mismo dígase de las ingenierías y tecnologías.

Teoría y experimento

La ciencia pretende comprender y explicar la Naturaleza. La ciencia cataloga, ordena, generaliza los hechos reales aislados. Esto lo hace mediante conjuntos estructurados de proposiciones: las **teorías científicas**. Los objetos de las teorías son categorías teóricas que se obtienen de los hechos reales con variados grados de abstracción. Por ejemplo son categorías teóricas conceptos como carga eléctrica, virus, especie animal, nicho ecológico, energía, elemento químico, etc. La conveniencia o no de usar ciertas categorías teóricas depende del éxito que tenga la teoría en explicar la realidad. La teoría científica hipotiza la validez de ciertas **leyes** que son relaciones entre las categorías teóricas. Las leyes pueden ser muy generales como: “la energía de un sistema aislado se conserva”, o muy particulares como : “El síndrome de inmunodeficiencia adquirida (SIDA) es una enfermedad infecciosa producida por un virus”. Las leyes teóricas implican relaciones entre los hechos reales. En una teoría científica satisfactoria las leyes deben ser consistentes con los hechos reales conocidos y además debe predecir relaciones no triviales entre hechos reales aún no conocidos. En otras palabras debe ser posible constatar la validez de la teoría confrontándola con la realidad. Esta confrontación es lo que llamamos **experimento**. Como las leyes teóricas son proposiciones generales su validez no se puede **probar** con la observación de un número finito de casos particulares. Sin embargo si podemos probar la falsedad de una ley: basta que no se cumpla en un solo caso. Decimos que la teoría debe ser **falsificable**. Toda teoría científica se acepta provisionalmente, hasta que se demuestre lo contrario.

Las teorías físicas modernas son de gran complejidad matemática. Esto ha hecho que el trabajo de los físicos se haya especializado; hay físicos teóricos y experimentales. Hoy en día se ha desarrollado también la Física Computacional, en la que se ponen a prueba teorías físicas mediante el modelaje numérico con computadoras. Estas técnicas son particularmente útiles cuando se estudian sistemas con muchísimos elementos o teorías matemáticamente muy complejas.

Teorías generales de la Física

La teoría más básica de la Física es la teoría del espacio y del tiempo. Tenemos luego la **Cinemática** que estudia como describir el movimiento y la **Dinámica** que determina cual es el movimiento de los cuerpos dado un cierto tipo de interacción (fuerza) entre ellos.

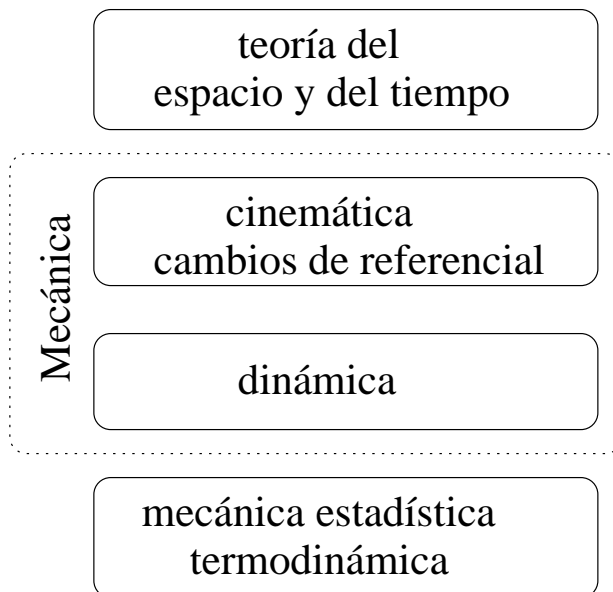


Fig. 1.2 Teorías generales de la Física

Los cuerpos macroscópicos están formados por un número inmenso de átomos y moléculas por lo que resulta imposible una descripción detallada usando la mecánica. Sin embargo se descubre empíricamente que para estos sistemas aparecen nuevas regularidades descritas por la **Termodinámica**. Esta es una teoría fenomenológica, o sea derivada de la experiencia, que tiene sus propias categorías como temperatura y calor. La **Mecánica Estadística**, combinación de mecánica con estadística, es una teoría que permite por una parte darle un basamento de primeros principios a la Termodinámica y por otra calcular propiedades termodinámicas de sistemas particulares.

El espacio físico es una abstracción matemática ligada a un cuerpo rígido que se asume en reposo y que forma el **sistema** o **marco de referencia**. La teoría clásica del espacio y del tiempo que nos viene desde la antigüedad es muy simple: La geometría del espacio físico, independientemente del marco de referencia, es la que estableció Euclides hace 2300 años (geometría Euclídea). A diferencia del espacio, que es relativo al marco de referencia, el tiempo sería absoluto. Esto es, se supone que se pueda sincronizar todos los relojes, independientemente de como se muevan. Esto fue aceptado por Galileo y Newton. Los fundamentos de la mecánica clásica fueron establecidos por Newton con sus tres famosas leyes en el siglo XVII. La Mecánica Clásica se desarrolló por todo el siglo XVIII llegando a tener un alto grado de sofisticación matemática. La Termodinámica y la Mecánica Estadística se desarrollaron durante el siglo XIX.

Un punto importante de la Mecánica es que sus leyes son válidas solamente en marcos de referencia particulares, que denominamos **sistemas de referencia inerciales** (SRI) y que se mueven con movimiento rectilíneo uniforme entre sí. Los SRI son equivalentes entre sí (Relatividad Galileana).

A principios del siglo XX Einstein estableció que la velocidad de la luz era la velocidad máxima de la naturaleza $c \approx 3 \times 10^8 \text{m/s}$. Al haber una velocidad máxima para las señales se hace imposible sincronizar todos los relojes. Sólo es posible sincronizar los relojes que estén en reposo con respecto a un mismo SRI. En otras palabras el tiempo también es relativo. La cinemática en un SRI es para Einstein idéntica a la cinemática clásica, pero las reglas para cambiar de marco de referencia son diferentes. La nueva teoría se denominó **Relatividad Especial**. La Dinámica también es diferente. Desde entonces el adjetivo “relativista” se usa en Física para indicar algo que está conforme con la Relatividad Especial o algo que requiere de la Relatividad Especial. Si las velocidades son mucho más pequeñas que la velocidad de la luz los efectos relativistas no se notan.

	$v \ll c$	$v \sim c$
sistemas macroscópicos	Mecánica Newtoniana (Clásica no-Relativista)	Mecánica Clásica Relativista
sistemas microscópicos	Mecánica Cuántica no-Relativista	Mecánica Cuántica Relativista

Fig. 1.3 Subdivisiones de la Mecánica

También a principios del siglo XX se descubrió que la Mecánica Newtoniana no valía para cuerpos muy pequeños. A escala atómica ($\sim 10^{-10} \text{m}$) es necesario usar una nueva mecánica, la **Mecánica Cuántica**. Esta teoría se desarrolló en la primera mitad del siglo XX en su versión no relativista y a mediados de siglo en su versión relativista. La Mecánica Cuántica es una teoría matemáticamente muy compleja, por eso seguimos estudiando la Mecánica Clásica no Relativista que describe muy bien la mayor parte de lo que pasa en nuestro entorno humano.

Interacciones fundamentales

Todas las fuerzas que se observan en la naturaleza se pueden reducir a cuatro interacciones fundamentales. De estas sólo dos se observan a escala macroscópica: La **atracción gravitacional** y las **interacciones electromagnéticas**.

La versión no-relativista de la gravedad fue establecida por Newton en el siglo XVII. Esta teoría junto con sus tres leyes de la mecánica le permitió explicar el movimiento de los planetas y otros objetos del sistema solar. A principios del siglo XX Einstein desarrolló la versión relativista de la gravedad, teoría que lleva el nombre de **Relatividad General**.

Capítulo 1: Introducción a la Física

Desde el siglo XVII y especialmente en los siglos XVIII y XIX se estudió ampliamente los fenómenos eléctricos y magnéticos. Al principio se pensó que eran dos tipos de fenómenos separados, pero al principio del siglo XIX se demostró que eran dos aspectos de una misma interacción. La teoría llegó a su culminación con la leyes establecidas en la segunda mitad del siglo XIX por el físico escocés James Clerk Maxwell (1831–1879). Las leyes de Maxwell predicen la existencia de ondas electromagnéticas de las que la luz sería un ejemplo, y que se propagan con una determinada velocidad $c \approx 3 \times 10^8 \text{m/s}$, que depende de las constantes del electromagnetismo. Esta propiedad es manifiestamente incompatible con la Relatividad Galileana: la velocidad de la luz pudiera ser la misma en cualquier dirección solamente en un marco de referencia particular, al que se llamó éter. Pero todos los tentativos de medir una velocidad absoluta respecto al éter fracasaron. Einstein resolvió este dilema suponiendo que en realidad el éter no existía y que todos los SRI eran equivalentes también para el electromagnetismo. El precio que hubo que pagar fue una nueva manera de calcular los cambios de marco de referencia en la que el tiempo es relativo. La nueva teoría se llamó Relatividad Especial. Por su misma naturaleza la teoría electromagnética es relativista. La combinación de esta teoría con la Mecánica Cuántica produce la Electrodinámica Cuántica, una de las teorías físicas más precisas. Una de las predicciones de esta teoría es la existencia de una partícula asociada a las ondas electromagnéticas, el fotón, que fue propuesto por inicialmente por Einstein en 1905.

Teoría Electromagnética Clásica	Electrodinámica Cuántica
Relatividad General (Gravitación)	No hay una teoría consistente

Teoría macroscópica Teoría Cuántica

Fig. 1.4 Teorías de las interacciones de largo alcance

Uno de los frentes abiertos de la Física contemporánea es la falta de una teoría consistente que combine la Relatividad General con la Mecánica Cuántica.

Las otras dos interacciones fundamentales de la naturaleza tienen un alcance muy corto, del orden de la dimensiones de los núcleos atómicos ($\sim 10^{-15} \text{m}$). La interacción **Nuclear Fuerte** es la responsable de la fuerza que une protones y neutrones en el núcleo atómico. La interacción **Nuclear Débil** está relacionada con el decaimiento radioactivo β , ($n \rightarrow p + e + \bar{\nu}$). Las teorías de estas interacciones son relativistas y cuánticas y se desarrollaron en la segunda mitad del siglo XX.

Ramas de la Física según el sistema estudiado

La Física se puede subdividir también en ramas según el tipo de sistema que estudia. Tenemos por ejemplo:

- Física de partículas elementales e interacciones fundamentales (Física de energías altas)
- Física nuclear
- Física atómica y molecular
- Física de macromoléculas
- Física de materia condensada (líquidos, sólidos, amorfos, polímeros, etc.)
- Física de agregados y sistemas complejos
- Física planetaria, Astrofísica, Cosmología.

Otras ramas que no entran en esta clasificación son la Óptica, la Acústica y la Mecánica de Fluidos. Otro campo que se ha desarrollado últimamente es el estudio de sistemas que no sean ni tan pequeños para que se pueda aplicar fácilmente la Mecánica Cuántica ni tan grandes como para que estén bien descritos por la Mecánica Clásica (sistemas mesoscópicos).

A medida que la Física se va desarrollando sus fronteras se mueven cada vez más hacia lo muy pequeño, lo muy complejo o lo muy grande.

Magnitudes físicas, unidades y dimensiones

La Física estudia las propiedades de la materia. Algunas propiedades no las hemos podido cuantificar, como el sabor de una sustancia, otras como la longitud sí las podemos cuantificar. Las propiedades de la materia que son susceptibles de ser cuantificadas son las **magnitudes físicas**. Algunas magnitudes físicas son números, como por ejemplo la cantidad de moléculas en una región de espacio es un número natural, pero la mayoría de las magnitudes físicas *no son números*. Sin embargo las magnitudes físicas tienen propiedades comunes a los números, se pueden **comparar**, se pueden **sumar** y se pueden **multiplicar por un número**.



Fig. 1.5 Operaciones matemáticas con longitudes

Desde un punto de vista matemático las magnitudes físicas forman espacios vectoriales de dimensión 1. Sólo podemos comparar o sumar magnitudes físicas homogéneas, es decir del mismo tipo. Podemos sumar la masa de una mosca con la de un clavo, pero no podemos sumar la longitud del clavo con su masa. Dos magnitudes físicas, aún diferentes, se pueden multiplicar, pero el resultado es una tercera magnitud física. Por ejemplo el producto de dos longitudes es un área y el producto de una velocidad por un tiempo es una longitud.

Podemos dar una medida numérica a una magnitud comparándola con un patrón. El valor de la magnitud del patrón es la unidad de medida.

$$\text{valor} = \text{medida} \times \text{unidad} \quad (1)$$

Las leyes físicas tienen típicamente la forma de relaciones matemáticas entre variables que representan magnitudes físicas.

El valor de las variables se determina, o bien midiéndolas y comparándolas con un patrón o unidad, o bien calculándolas a partir de otras variables. Las leyes físicas permiten definir las unidades de todas las magnitudes físicas en función de las unidades de unas pocas magnitudes fundamentales. Para la geometría la magnitud fundamental es la longitud (l). Para la cinemática hay que agregar el tiempo (t) y para la dinámica la masa (m). En la Termodinámica aparece la temperatura absoluta (T) y en electromagnetismo la carga eléctrica (q). Cualquier otra magnitud física tiene unas **dimensiones** que se expresan como el producto de las magnitudes fundamentales elevadas a un exponente. Si X es una variable, sus dimensiones se denotan con $[X]$ y serán

$$[X] = l^\alpha t^\beta m^\gamma q^\delta T^\epsilon \quad (2)$$

Típicamente los exponentes α, \dots, ϵ son números enteros, o en todo caso racionales. No es necesario escribir las magnitudes fundamentales que tengan exponente cero. Sigue una lista de las dimensiones de algunas magnitudes físicas derivadas.

Área	$[A] = l^2$
Volumen	$[V] = l^3$
Velocidad	$[v] = lt^{-1}$
Aceleración	$[a] = lt^{-2}$
Densidad	$[d] = [m]/[V] = l^{-3}m$
Fuerza	$[F] = [m][a] = lt^{-2}m$
Presión	$[p] = [F]/[A] = l^{-1}t^{-2}m$
Energía	$[E] = l^2t^{-2}m$
Potencia	$[P] = [E]/[t] = l^2t^{-3}m$
Frecuencia	$[f] = t^{-1}$
Entropía	$[E]/[T] = l^2t^{-2}mT^{-1}$
Corriente eléctrica	$[I] = [q]/[t] = t^{-1}q$
Potencial eléctrico	$[V] = [E]/[q] = l^2t^{-2}mq^{-1}$
Resistencia eléctrica	$[R] = [V]/[I] = l^2t^{-1}mq^{-2}$

Una vez establecidas las unidades de las variables fundamentales quedan determinadas las unidades de las otras variables según las dimensiones correspondientes.

El sistema de unidades más usado actualmente es el internacional (SI), que usa el **segundo** (s) como unidad de tiempo, el **metro** (m) como unidad de longitud, el **kilogramo** (kg) como unidad de masa, el grado **Kelvin** (K) como unidad de temperatura absoluta y el **culombio** (C) como unidad de carga. En realidad no se usa un patrón de carga sino de corriente eléctrica cuya unidad es el **amperio** ($1 \text{ A} = 1 \text{ Cs}^{-1}$), por eso el sistema se denomina también sistema de unidades MKSA (metro-kilogramo-segundo-amperio). Sin embargo es más conveniente didácticamente considerar la carga como magnitud fundamental en vez de la corriente eléctrica.

La idea de establecer un sistema de unidades racional, en el que las subunidades se obtuviesen dividiendo por factores de diez, el sistema métrico decimal, data de los tiempos de la Revolución Francesa en el siglo XVIII. La definición original de segundo fue $1/86400$

la duración del día solar promedio ($86\,400 = 24 \times 60 \times 60$). Con el avance de la tecnología fue posible detectar variaciones en la duración del año y del día sideral (tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta alrededor de su eje). Hoy en día el segundo se define como 9 192 631 770 períodos de la radiación de la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado base del isótopo 133 del Cesio.

La definición original del metro fue la diezmillonésima parte de la distancia entre el ecuador y un polo. Se hizo una expedición para medir la longitud del meridiano y se hizo una barra patrón. Con el tiempo se detectó un error en la medición del meridiano, por lo que se decidió que el metro era la longitud de la barra patrón. Como actualmente es posible medir la velocidad de la luz con mayor precisión de la de las mediciones de longitud de una barra, y como se confía en que la velocidad de la luz sea en efecto una constante universal, se decidió definir el metro a partir del segundo fijando el valor de la velocidad de la luz. En un segundo la luz recorre exactamente 299 792 458 metros.

La definición original de kilogramo era la masa de un litro de agua a la temperatura en la que la densidad es máxima ($\sim 4^\circ\text{C}$). Usando la definición se construyó un patrón de una aleación de 90% platino y 10% iridio, pero también en este caso al mejorar la tecnología se demostró que la definición y el patrón difieren. Se decidió que el kilogramo era la masa del patrón, cosa que sigue siendo hoy en día. El kilogramo patrón se guarda en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas en Sèvres en las cercanías de París.

La escala Kelvin de temperatura está definida de forma que la temperatura absoluta del punto triple del agua (en el que coexisten en equilibrio, agua, hielo y vapor) es 273,16 K.

Muchas unidades derivadas tienen su propio nombre, por ejemplo la unidad de fuerza es el newton ($1\text{ N} = 1\text{ kg ms}^{-2}$), la unidad de energía es el joule o julio ($1\text{ J} = 1\text{ kg m}^2\text{s}^{-2}$), la unidad de presión es el pascal ($1\text{ Pa} = 1\text{ kg m}^{-1}\text{s}^{-2}$), la unidad de frecuencia es el hercio o hertz ($1\text{ Hz} = 1\text{ s}^{-1}$) y la unidad de potencial eléctrico es el voltio ($1\text{ V} = 1\text{ kg m}^2\text{s}^{-2}\text{C}^{-1}$).

Hay unidades particulares que se usan en determinados campos. En Química y Física Molecular se usa la unidad de masa atómica (uma) también llamada dalton (Dalton) que es $1/12$ de la masa del isótopo 12 del Carbono. Con esta unidad se expresan los pesos atómicos y moleculares. El número de Avogadro N_A es el número de daltones que hay en un gramo ($N_A \approx 6,02214179 \times 10^{23}$). Un mol de algo es un número de cosas igual al número de Avogadro. En la Física Atómica se usa el Ångström ($1\text{ Å} = 1\text{ angstrom} = 10^{-10}\text{m}$). El diámetro del átomo de Hidrógeno es aproximadamente 1 Å . El litro (ℓ) es una unidad de volumen igual a 10^{-3}m^3 . La tonelada (t) es igual a 10^3 kg . La unidad astronómica UA es la longitud del semi-eje mayor de la órbita terrestre. El año-luz es la distancia recorrida por la luz en un año.

Se obtienen múltiplos y submúltiplos de las unidades anteponiendo al nombre de la unidad un prefijo que corresponde a un factor multiplicativo. Los factores estándar más comunes, con sus nombres, son múltiplos:

factor	símbolo	prefijo
10	da (D)	deca
10^2	h	hecto
10^3	k	kilo
10^6	M	mega
10^9	G	giga
10^{12}	T	tera
10^{15}	P	peta

submúltiplos:

factor	símbolo	prefijo
10^{-1}	d	deci
10^{-2}	c	centi
10^{-3}	m	mili
10^{-6}	μ	micro
10^{-9}	n (ν)	nano
10^{-12}	p	pico
10^{-15}	f	femto

Por ejemplo 1GHz (un gigahercio) es 10^9 Hz, mientras que 1pC (un picoculombio) es 10^{-12} C y 1 mK (un milikelvin) es 10^{-3} K.

Como escribir y manipular correctamente las fórmulas físicas

Las leyes deben ser escritas de forma que no dependan de las unidades que se escojan. Para lograr esto las fórmulas deben cumplir las siguientes reglas:

- 1- El producto de variables tiene las dimensiones que resultan del producto de las dimensiones de cada variable.
- 2- Los dos lados de una igualdad o desigualdad deben ser homogéneos, o sea deben tener las mismas dimensiones.
- 3- Nunca se puede sumar o restar cantidades con dimensiones diferentes.
- 4- Términos con las mismas dimensiones pero con unidades diferentes pueden aparecer en la misma expresión, pero al efectuarse la operación deben ser llevados a las mismas unidades.
- 5- Las únicas funciones cuyos argumentos pueden tener dimensiones son el valor absoluto y las potencias con exponente entero o racional.
- 6- Las unidades de las variables no se escriben. Sólo se escriben las unidades de las constantes cuando se exprese el valor numérico.

Por ejemplo es correcto escribir $1 \text{ km} + 25 \text{ m} = 1025 \text{ m}$, pero la expresión $d + v$ donde d es una distancia y v una velocidad está seguramente equivocada. También es incorrecta la fórmula

$$F = ma \quad (\text{N})$$

en la que aparece explícitamente la unidad del resultado. Las variables m y a tienen sus propias unidades y el producto tiene la unidad correcta. Lo correcto es escribir simplemente

$$F = ma.$$

En un libro de matemáticas pudiera aparecer que la posición x de un móvil como función del tiempo t está dada por la expresión

$$x(t) = 5 \sin(2t), \quad (3)$$

donde la unidad de x es metros y la de t es segundos. En física la forma correcta de escribir la fórmula es

$$x(t) = 5 \text{ m} \sin(2 \text{ s}^{-1}t) \quad (4)$$

o también

$$x(t) = A \sin(bt),$$

donde $A = 5 \text{ m}$ y $b = 2 \text{ s}^{-1}$. A debe tener las mismas dimensiones que x y el producto bt no debe tener dimensiones. Nótese que el significado de las variables x y t es diferente en las formulas (3) y (4). En la primera las variables representan las *medidas* en determinadas unidades (números), mientras que en la segunda representan las *magnitudes físicas*.

En ciencia se prefiere no escribir números con más de dos o tres ceros al final del número o antes de la primera cifra significativa, por lo que para cantidades muy grandes o muy pequeñas se usa la notación científica. A $0,0000253$ se prefiere $2,53 \times 10^{-5}$ y a $643\,200\,000$ se prefiere $6,432 \times 10^8$ a menos que no sea un entero exacto.

La notación científica permite dar una indicación de la precisión del número. Por convención la última cifra que se escribe se considera segura con una precisión de una unidad. Por ejemplo $6,34$ indica un número comprendido entre $6,335$ y $6,345$, o sea $6,340 \pm 0,005$. Con esta convención los ceros al final de la fracción decimal tienen significado: $2,0$ indica un número entre $1,95$ y $2,05$, mientras que $2,000$ indica un número entre $1,9995$ y $2,0005$. Para indicar una fracción exacta es mejor usar la notación de fracción, por ejemplo se escribe $3/2$ en vez de $1,5$ que se presta a confusión.

Capítulo 2

Tiempo, Espacio, Geometría, Vectores

Tiempo

El tiempo es una de las magnitudes físicas fundamentales. Todos tenemos una idea intuitiva de tiempo pero tratar de definirlo es una de las tareas más difíciles. Se han escrito multitud de tratados sobre el tema, pero para la Física lo que importa no son las disquisiciones sobre la naturaleza del tiempo, sino como se mide. La posibilidad de medir el tiempo se basa en la siguiente hipótesis, que podríamos llamar **principio de la homogeneidad del tiempo**:

Las leyes físicas no cambian con el transcurrir del tiempo.

En base a este principio si repetimos un proceso físico en las mismas condiciones su duración será la misma. Esto permite usar la duración de un proceso físico cualquiera, que se pueda repetir en las mismas condiciones, para definir un patrón para medir el tiempo. Llamamos reloj cualquier mecanismo que sirva a este propósito. Los ejemplos más clásicos son el reloj de arena y el de agua (clepsidra), conocidos ya en la antigüedad. Un gran avance se logró en el siglo XVII, cuando se usó un péndulo para regular el ritmo de los relojes de engranajes, que ya se conocían desde el siglo X. Posteriormente la substitución del péndulo por un oscilador de muelle en espiral permitió la construcción de relojes portátiles. Diferentes tipos de osciladores mecánicos o eléctricos han sido usados para construir relojes. Los llamados relojes atómicos usan como patrones las frecuencias de determinadas radiaciones atómicas. Estos relojes tienen gran precisión porque las frecuencias de las oscilaciones no dependen de los detalles de construcción, como sería por ejemplo la longitud de un péndulo.

Ya en la antigüedad, se comprobó que, si bien la duración del **día natural** (o sea el tiempo que pasa el sol sobre el horizonte) cambia apreciablemente durante las épocas del año y depende de la latitud, el **día solar** (el tiempo entre dos mediodías sucesivos = día natural + noche) era constante. Nótese que el día solar no es el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta alrededor de su eje, tiempo este que se denomina **día sideral** o **sidéreo** y que se mide con dos pasadas sucesivas de una misma estrella por el meridiano. El día solar es unos minutos más largo que el día sideral porque durante el tiempo en que la Tierra da una vuelta sobre su eje la línea Sol-Tierra ha rotado un cierto ángulo. En un año hay un día sideral más que el número de días solares, o sea que hay aproximadamente 365,25 días solares y 366,25 días siderales. Con relojes más precisos, se pudo verificar que el día solar también fluctúa durante el año, debido a que la órbita terrestre es elíptica, no circular. En cambio el día sideral se mantiene constante. Por eso se definió el segundo en base al promedio del día solar en un año, que es proporcional al día sideral. Con el advenimiento de los relojes atómicos se descubrió que aún las duraciones del día sideral y del año cambian muy lentamente. Por esto se cambió el patrón de tiempo y se usa la radiación hiperfina del estado base del isótopo ^{133}Cs , de 9,2 GHz para definir el segundo.

Longitud, marco de referencia y espacio

La longitud es otra de las magnitudes fundamentales de la Física. La posibilidad de poder medir la longitud se basa en la existencia de **cuerpos rígidos**, o sea cuerpos en los que las distancias entre sus partes se mantienen constantes. Los cuerpos rígidos se pueden usar como reglas. La distancia entre dos cuerpos es el mínimo número reglas iguales adyacentes que se pueden poner entre uno y otro.

En el estudio de la mecánica es muy usado el concepto de **partícula** o **punto material** que sería un cuerpo cuyas dimensiones son insignificantes con respecto a las otras dimensiones del sistema estudiado. Es de hacer notar que un cuerpo puede ser o no una partícula según el contexto. Por ejemplo si estudiamos el movimiento de los planetas en el sistema solar podríamos considerar la Tierra como una partícula.

Otro concepto fundamental de la mecánica es el de **sistema de referencia** (SR). El sistema o marco de referencia es un **cuerpo rígido** que consideramos en reposo y que permite determinar la posición de otros cuerpos midiendo las distancias entre estos y diferentes partes del sistema de referencia. En la vida diaria usamos a la Tierra como marco de referencia. Si vamos en un avión nuestro SR es el avión mismo. Para determinar la posición de una partícula bastan tres distancias (coordenadas). El **punto** del espacio físico ocupado por una partícula es una abstracción matemática, cuya propiedad es tener las mismas coordenadas que la partícula. Se supone que el punto exista aún cuando no haya partícula presente. Los puntos del espacio físico representan las potenciales posiciones que pueden ocupar las partículas. El conjunto de los puntos constituye el **espacio** físico ligado (o relativo) al marco de referencia. Como bastan tres coordenadas para determinar la posición decimos que el espacio tiene tres dimensiones. A cada SR le corresponde un espacio físico ligado a él. Solamente un cuerpo rígido en reposo con respecto al SR puede compartir con él un mismo espacio físico. Un concepto que algunas veces se confunde incorrectamente con el SR es el de sistema de coordenadas. Para un SR hay infinitas maneras de definir un sistemas de coordenadas.

La geometría del espacio físico

Inicialmente la Geometría (Geo = Tierra y metría = medición) era el arte de los topógrafos y agrimensores. Con el tiempo se fueron encontrando empíricamente las propiedades de las figuras geométricas. Por ejemplo el teorema de Pitágoras era conocido empíricamente antes de que Pitágoras lo demostrara. En ese tiempo la Geometría era parte de la Física en el sentido de que dependía del experimento. Con el tiempo las relaciones geométricas se fueron sistematizando y deduciendo unas de otras, hasta que en el siglo IV a.C. Euclides, matemático griego de Alejandría de Egipto, publicó un tratado en el que deducía el conocimiento geométrico de su época a partir de ciertos postulados no demostrados (axiomas). Las aserciones demostradas eran los teoremas. A este punto la Geometría dejó de ser física para convertirse en matemática. Pero había un malentendido en la naturaleza de las teorías matemáticas. Para Euclides los axiomas eran verdades “tan evidentes” que no necesitaban comprobación. Por consiguiente por más de 2000 años se pensó que había **una única geometría posible**. Pero había un axioma que a muchos no les parecía evidente: *Dada una recta y un punto hay una sola recta paralela a la recta dada que pasa por el punto*. Por siglos muchos trataron infructuosamente de demostrar el axioma de las paralelas a partir de los otros axiomas de Euclides. Fue sólo en el siglo XIX cuando el matemático ruso Nicolás Lobachevsky demostró que había geometrías consistentes en las que se substituía el postulado de las paralelas por otro en el que no había paralelas o había infinitas. Fue un punto crucial en la historia de las matemáticas. Se comprendió que los axiomas no eran “verdades evidentes que no necesitan demostración”, como decía Euclides, sino más bien proposiciones arbitrarias que se suponen verdaderas *a priori*. Lo único que debe satisfacer un conjunto de axiomas es no ser incompatibles. Si se incluye un nuevo axioma en una teoría matemática se obtiene una teoría más particular que la teoría original. Si cambiamos un axioma por otro se obtiene una nueva teoría. No habría “una” geometría sino muchas posibles.

Para hacernos una idea de como sea posible que haya varias geometrías imaginémosnos que fuéramos seres bidimensionales que viven en la superficie de una esfera. Podríamos estudiar la geometría de nuestro espacio (2D). En vez de la recta entre dos puntos hablaríamos de la geodésica (un arco de círculo máximo), o sea la línea de menor longitud entre los puntos. Descubriríamos que el espacio no sería plano sino curvo. Por ejemplo la suma de los ángulos internos de un triángulo sería mayor de 180° . Es importante notar que a una escala mucho más pequeña que el radio de la esfera la curvatura del espacio no se podría apreciar.

Habiendo, no una, sino infinitas geometrías posibles se plantea entonces la siguiente pregunta física: *¿Cuál es la geometría del espacio físico?*

¿Cómo podemos responder esta pregunta a la luz de nuestros conocimientos actuales? Según la teoría actual de la gravedad (Relatividad General) la geometría del espacio depende del movimiento y distribución de las masas, o sea que es dinámica. En ausencia de grandes masas los espacios físicos relativos a sistemas de referencia **inerciales** (de los que se tratará en detalle al estudiar la Dinámica) tienen una geometría Euclídea. Los sistemas de referencia no-inerciales o acelerados, aún en ausencia de masas, tienen una geometría no-Euclídea, siendo el radio de curvatura del espacio del orden de c^2/a , donde c es la velocidad de la luz y a la aceleración.

En resumen podemos esperar que la curvatura del espacio sea apreciable:

1. En las cercanías de masas muy grandes.
2. En sistemas de referencia fuertemente acelerados.
3. A distancias del orden del tamaño del Universo.

En la mecánica Newtoniana, que es lo que estudiaremos en lo que sigue, se asume un espacio-tiempo Galileano, o sea un espacio Euclídeo para todos los sistemas de referencia y un tiempo **absoluto**, el mismo para todos los relojes independientemente de su movimiento.

Vectores geométricos

La teoría de vectores es un capítulo de la geometría Euclídea que permite tratar problemas geométricos complejos con técnicas algebraicas. La formulación de las leyes físicas se simplifica mucho con el uso de vectores, por eso las formulaciones modernas de la mecánica los usan ampliamente. En el resto del capítulo desarrollaremos la teoría geométrica de los vectores, para lo cual supondremos conocida la geometría de Euclides de los espacios de tres dimensiones. Para no recargar inútilmente el texto presentamos demostraciones intuitivas, no rigurosas.

Llamemos \mathcal{E} a un espacio Euclídeo tridimensional. Empecemos por definir los segmentos orientados.

Definición 1. *Dados dos puntos A y B del espacio \mathcal{E} el segmento orientado AB es el par ordenado (A, B) . El punto A es el punto inicial y B el final.*

Los segmentos orientados son simplemente los elementos de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$. Representamos los segmentos orientados con una flecha que va del punto inicial A al punto final B .

Definición 2. *Se denominan nulos los segmentos orientados que inician y terminan en el mismo punto.*

Definición 3. *La magnitud de un segmento orientado AB es la distancia \overline{AB} entre los puntos A y B .*

Teorema 1. *Un segmento orientado es nulo si y sólo si su magnitud es cero.*

Esto es debido a que $\overline{AA} = 0$ y a que $A \neq B \implies \overline{AB} > 0$.

Definición 4. *Dos segmentos orientados no nulos AB y CD son paralelos si la recta r_1 que pasa por los puntos A y B y la recta r_2 que pasa por los puntos C y D son paralelas. Escribimos $AB \parallel CD$.*

Diremos que un segmento es paralelo a una recta si es paralelo a algún segmento orientado de la recta. También hablaremos de segmentos orientados paralelos a un plano cuando lo sean con alguna recta contenida en el plano.

Por convención consideraremos que los segmentos orientados nulos son paralelos a cualquier otro segmento orientado.

Una dirección es un conjunto de todas las rectas paralelas entre sí, es decir la dirección es lo que las rectas paralelas tienen en común entre si. Podemos entonces decir que dos segmentos orientados paralelos tienen la misma dirección.

Pasaremos ahora a definir segmentos orientados con el mismo sentido.

Definición 5. *Dos segmentos orientados no nulos AB y CD pertenecientes a la misma recta tienen el mismo sentido si la semirecta s_1 que se origina en A y contiene B y la semirecta s_2 que se origina en C y contiene D están la una contenida en la otra ($s_1 \subset s_2$ o $s_2 \subset s_1$).*

Definición 6. *Dos segmentos orientados paralelos AB y CD no pertenecientes a la misma recta tienen el mismo sentido si los segmentos de recta AC y BD no se cruzan.*

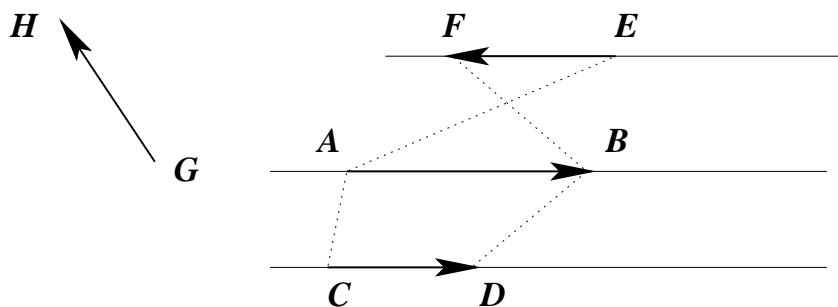


Fig. 2.1 Dirección y sentido de segmentos orientados

AB y GH no son paralelos. AB y CD son paralelos del mismo sentido. AB y EF son paralelos de sentido contrario.

Definición 7. AB es equipolente a CD si

a) ambos son nulos, $\overline{AB} = \overline{CD} = 0$, o

b)

1. $AB \parallel CD$
2. $\overline{AB} = \overline{CD} > 0$
3. AB y CD tienen el mismo sentido.

Los segmentos orientados equipolentes son los que tienen las mismas dirección y magnitud y el mismo sentido.

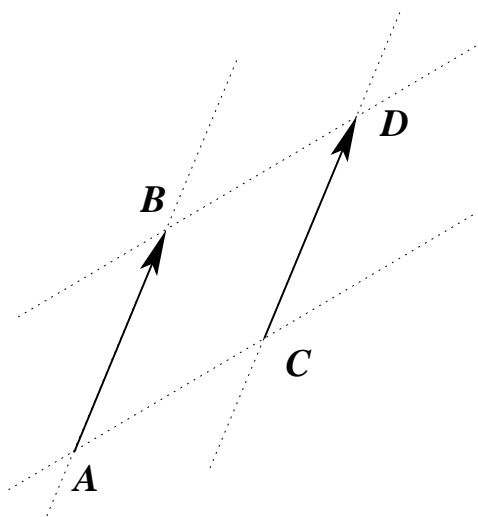


Fig. 2.2 Segmentos orientados equipolentes

$ABDC$ es un paralelogramo.

Teorema 2. “Ser equipolente a” es una relación de equivalencia.

Esto es, es una relación que debe ser:

1. reflexiva (AB es equipolente a AB),
2. simétrica (AB equipolente a CD implica CD equipolente a AB) y
3. transitiva (AB equipolente a CD y CD equipolente a EF implica AB equipolente a EF).

Definición 8. Un vector es una clase de equivalencia de la equipolencia de los segmentos orientados.

En otras palabras un vector es un conjunto de segmentos orientados equipolentes entre sí, sin que falte ninguno. Denominamos \vec{AB} al vector al que pertenece el segmento orientado AB .

Definición 9.

$$\vec{AB} = \{CD \mid CD \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \text{ y } CD \text{ equipolente a } AB\}$$

Definición 10. Denominamos \mathcal{V} al conjunto de los vectores

Esto es $\mathcal{V} = \mathcal{E} \times \mathcal{E} / \text{equipolencia}$. Para distinguir las variables numéricas de las vectoriales se escribirá una flecha sobre estas últimas. Esto es, si escribimos \vec{v} entendemos que se trata de un vector. En los libros es común usar variables en negritas (\boldsymbol{v}) en vez de flechas. Para representar un vector podemos usar uno cualquiera de los segmentos orientados pertenecientes a él.

Debido a que todos los segmentos orientados nulos son equipolentes podemos hacer la siguiente definición.

Definición 11. El vector nulo es el vector correspondiente a los segmentos orientados nulos. $\vec{0} = \vec{AA}$.

Usualmente, cuando no hay confusión, se omite la flecha sobre el cero.

Definición 12. Se denomina módulo o magnitud de un vector a la magnitud de sus segmentos orientados.

$$|\vec{AB}| = \overline{AB}.$$

Teorema 3.

$$|\vec{a}| = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}.$$

Teorema 4.

$$(\forall A)(A \in \mathcal{E})(\forall \vec{a})(\vec{a} \in \mathcal{V})(\exists! B)(B \in \mathcal{E}) \quad \vec{AB} = \vec{a}$$

En palabras: Para todo punto del espacio A y para todo vector \vec{a} existe un solo punto B tal que el segmento orientado AB pertenezca al vector \vec{a} .

Demostración. Si $\vec{a} = 0$ el punto B debe coincidir con A . Si \vec{a} no es nulo existe una sola recta r paralela a \vec{a} que pasa por A . Hay dos puntos B' y B'' que pertenecen r y distan de A la magnitud de \vec{a} , $\overline{AB'} = \overline{AB''} = |\vec{a}|$. Uno de los segmentos orientados AB' y AB'' tiene el mismo sentido y el otro el opuesto que \vec{a} .

Hay una correspondencia biunívoca entre los puntos del espacio \mathcal{E} y los vectores \mathcal{V} . Si escogemos $O \in \mathcal{E}$,

$$A \in \mathcal{E} \iff \vec{OA} \in \mathcal{V}. \quad (5)$$

Desplazamientos

En Física los vectores geométricos pueden ser interpretados como desplazamientos. Si nos movemos del punto A al punto B , el vector \vec{AB} es el desplazamiento.

Producto de un vector por un número

Lo interesante de los vectores es que podemos definir un conjunto de operaciones matemáticas entre ellos, la primera de las cuales es el producto por un número.

Definición 13. Sean $c \in \mathbb{R}$ y $\vec{a} \in \mathcal{V}$

$$\vec{b} = c\vec{a} \iff \begin{cases} \vec{b} \in \mathcal{V} \\ |\vec{b}| = |c| |\vec{a}| \\ \vec{b} \parallel \vec{a} \\ \vec{b} \text{ tiene el sentido de } \vec{a} \text{ si } c > 0 \text{ y tiene el sentido opuesto si } c < 0 \end{cases}$$

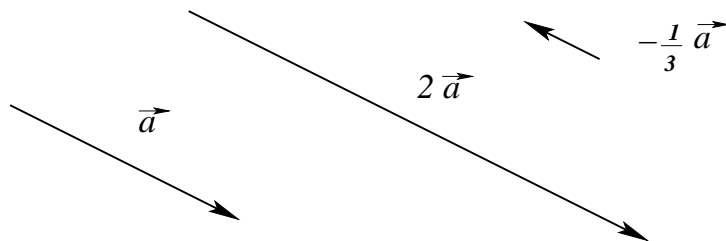


Fig. 2.3 Ejemplos de producto de un vector por un número

Es fácil demostrar las siguientes propiedades del producto por un número.

Teorema 5. $c\vec{a} = \vec{0} \iff c = 0 \text{ o } \vec{a} = \vec{0}$

* **Teorema 6.** $1\vec{a} = \vec{a}$

* **Teorema 7.** El producto por un número es asociativo con el producto de números,

$$\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}.$$

Teorema 8. Si $\vec{a} \neq \vec{0}$ y $\vec{b} \neq \vec{0}$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff (\exists \alpha)(\alpha \in \mathbb{R}) \vec{a} = \alpha\vec{b}$$

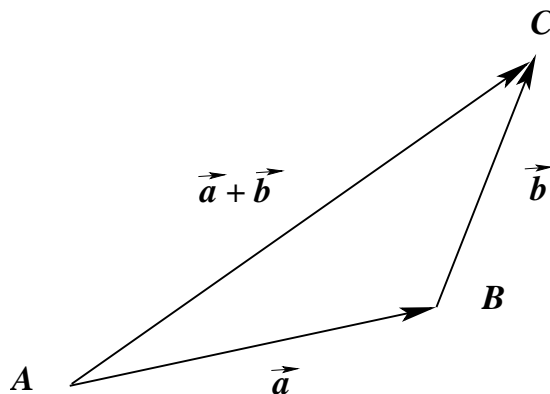


Fig. 2.4 Suma de vectores

Suma de vectores

Si nos desplazamos de un punto A a un punto B y luego del punto B a un punto C , el desplazamiento neto es el que nos lleva del punto A al punto C . Esto nos sugiere la conveniencia de definir una suma de vectores como sigue.

Definición 14. $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

La suma de vectores tiene las siguientes propiedades.

* **Teorema 9.** *La suma de vectores es conmutativa,*

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

Demostración. Sea AB un segmento orientado cualquiera del vector $\vec{a} = \vec{AB}$ y C el punto tal que $\vec{b} = \vec{BC}$. Por la definición de suma $\vec{a} + \vec{b} = \vec{AC}$. Sea D el punto tal que $\vec{AD} = \vec{b}$ y el punto C' tal que $\vec{DC}' = \vec{a}$. Por la definición de suma, $\vec{b} + \vec{a} = \vec{AC}'$. Como los puntos A, B, C y D forman un paralelogramo debe necesariamente ser $C = C'$.

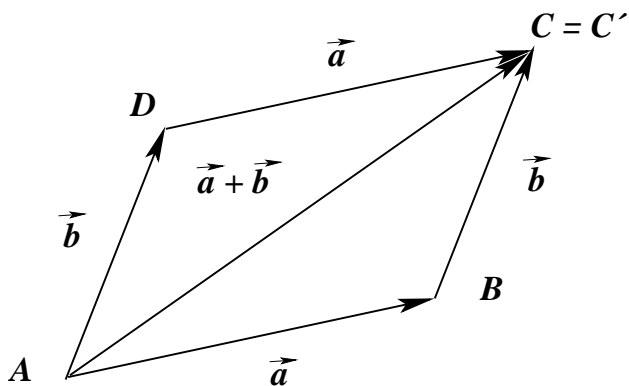


Fig. 2.5 Propiedad conmutativa de la suma

* **Teorema 10.** *La suma de vectores es asociativa*

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}.$$

Demostración. Sean $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{b}$ y $\vec{CD} = \vec{c}$, entonces

$$\vec{AB} + (\vec{BC} + \vec{CD}) = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}$$

y

$$(\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{CD} = \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD}.$$

* **Teorema 11.** $\vec{0}$ es un elemento neutro de la suma,

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$

Demostración. $\vec{AB} + \vec{BB} = \vec{AB}$.

* **Teorema 12.** *Todo vector \vec{a} tiene un opuesto $-\vec{a}$ tal que $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.*

Demostración. Sea $\vec{AB} = \vec{a}$, si ponemos $-\vec{a} = \vec{BA}$ se obtiene $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{BB} = \vec{0}$. La demostración de los próximos dos teoremas es más o menos inmediata.

Teorema 13. $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$

* **Teorema 14.** El producto tiene la propiedad distributiva respecto a la suma de números

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}.$$

* **Teorema 15.** El producto tiene la propiedad distributiva respecto a la suma de vectores

$$\beta(\vec{a} + \vec{b}) = \beta\vec{a} + \beta\vec{b}.$$

La demostración de este teorema se basa en que los lados de triángulos semejantes son proporcionales, como se ve en la figura 2.6.

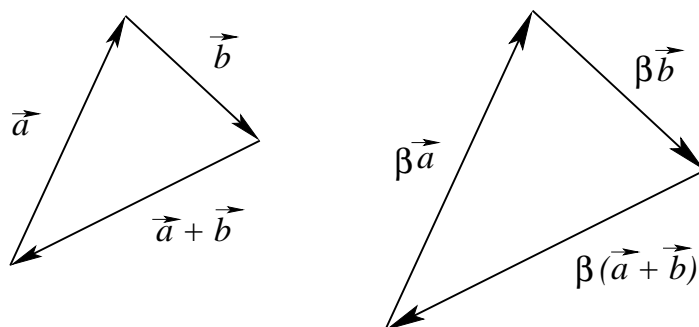


Fig. 2.6 Propiedad distributiva

Espacios vectoriales

En matemáticas se ha generalizado el concepto de vector y se define **espacio vectorial** a un conjunto \mathcal{V} en el que se haya definido una suma y un producto por un número para los que valgan las propiedades correspondientes a los teoremas que hemos marcado con un asterisco (6, 7, 9, 10, 11, 12, 14 y 15). Por ejemplo son espacios vectoriales las matrices $n \times m$ y los polinomios.

Independencia lineal

Este tópico es válido para espacios vectoriales genéricos.

Definición 15. Los vectores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ son linealmente independientes si y sólo si

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

Teorema 16. Si $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ son linealmente independientes y $k < n$ entonces $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ son linealmente independientes.

Definición 16. El espacio vectorial \mathcal{V} tiene dimensión n si y sólo si

- 1) Existe un conjunto de n vectores independientes
- 2) Cualquier conjunto de más de n vectores no es de vectores independientes.

Los monomios $1, x, x^2, x^3, \dots$ son linealmente independientes. Los polinomios de grado n forman un espacio vectorial de $n + 1$ dimensiones.

Los vectores geométricos forman un espacio vectorial de 3 dimensiones.

Definición 17. Si \mathcal{V} es un espacio vectorial de n dimensiones una base del espacio es cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes.

Teorema 17. Si \mathcal{V} es un espacio vectorial de n dimensiones y $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ son n vectores linealmente independientes, entonces

$$(\forall \vec{a} \in \mathcal{V})(\exists!(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n) \quad \vec{a} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \dots + \alpha_n \vec{b}_n$$

Definición 18. Si $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ es una base y $\vec{a} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \dots + \alpha_n \vec{b}_n$ los números α_k son las componentes del vector \vec{a} .

Teorema 18. Si $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ es una base, $\vec{a} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \dots + \alpha_n \vec{b}_n$ y $\vec{c} = \gamma_1 \vec{b}_1 + \dots + \gamma_n \vec{b}_n$, entonces

$$\lambda \vec{a} = \lambda \alpha_1 \vec{b}_1 + \dots + \lambda \alpha_n \vec{b}_n$$

y

$$\vec{a} + \vec{c} = (\alpha_1 + \gamma_1) \vec{b}_1 + \dots + (\alpha_n + \gamma_n) \vec{b}_n.$$

El producto por un número y la suma se reducen a las correspondientes operaciones sobre las componentes.

Coordenadas cartesianas oblicuas

El matemático y filósofo francés René Descartes (Cartesius) (1596–1650) inventó en el siglo XVII el método de localizar la posición de un punto mediante tres números, las coordenadas cartesianas. Considérese un punto arbitrario del espacio $O \in \mathcal{E}$ y tres rectas x, y y z que pasen por O y que no estén en un mismo plano. El punto O es el origen y las rectas son los ejes del sistema de coordenadas. Sean U, V y W sendos puntos diferentes de O que pertenecen a cada eje.

Las coordenadas de un punto arbitrario del espacio P se determinan de la siguiente manera:

Por el punto P pasa un solo plano paralelo a los ejes x y y . La intersección de ese plano con el eje z es un punto P_z . La intersección con el eje y del plano que pasa por P y es paralelo a los ejes x y z es un punto P_y y la intersección con el eje x del plano que pasa por P y es paralelo a los ejes y y z es el punto P_x . Las coordenadas ξ , η y ζ son los factores de proporcionalidad entre los vectores \vec{OP}_x , \vec{OP}_y y \vec{OP}_z y los vectores \vec{OU} , \vec{OV} y \vec{OW} respectivamente.

$$\begin{aligned}\vec{OP}_x &= \xi \vec{OU} \\ \vec{OP}_y &= \eta \vec{OV} \\ \vec{OP}_z &= \zeta \vec{OW}\end{aligned}$$

Escribimos $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ y

$$\vec{OP} = \vec{OP}_x + \vec{OP}_y + \vec{OP}_z = \xi \vec{OU} + \eta \vec{OV} + \zeta \vec{OW}. \quad (6)$$

Los vectores $\vec{b}_1 = \vec{OU}$, $\vec{b}_2 = \vec{OV}$ y $\vec{b}_3 = \vec{OW}$ forman una base. Para definir el sistema de coordenadas basta dar el origen O y la base $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$. Las coordenadas de P coinciden con las componentes del vector \vec{OP} .

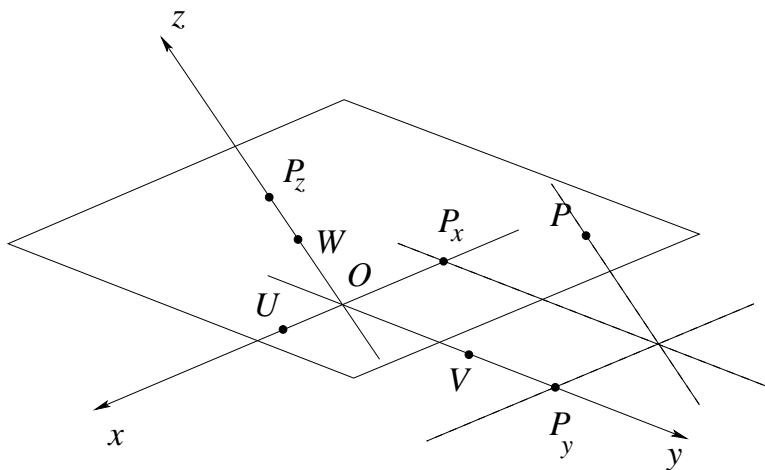


Fig. 2.7 Coordenadas cartesianas oblicuas

Teorema 18. Si $A \equiv (x_1, y_1, z_1)$ y $B \equiv (x_2, y_2, z_2)$ entonces

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (x_2 - x_1)\vec{b}_1 + (y_2 - y_1)\vec{b}_2 + (z_2 - z_1)\vec{b}_3.$$

Ecuaciones paramétricas de una recta

Consideremos la recta que pasa por un punto A y es paralela al vector no nulo \vec{a} . Consideremos un punto genérico de la recta P , debe ser

$$\vec{AP} \parallel \vec{a} \iff \vec{AP} = \lambda \vec{a}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \iff \vec{OP} = \vec{OA} + \lambda \vec{a}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si $A \equiv (x_A, y_A, z_A)$, $\vec{a} \equiv (a_x, a_y, a_z)$ y $P \equiv (x, y, z)$ las ecuaciones de las coordenadas son

$$P(\lambda) : \begin{cases} x = x_A + \lambda a_x \\ y = y_A + \lambda a_y \\ z = z_A + \lambda a_z \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

En el caso de que la recta esté en el plano xy se tienen dos ecuaciones con las que se puede eliminar el parámetro λ y obtener una ecuación implícita que se puede escribir como un determinante

$$\begin{vmatrix} x - x_A & a_x \\ y - y_A & a_y \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

Ecuaciones paramétricas de un plano

Consideremos el plano π que pasa por el punto $A \equiv (x_A, y_A, z_A)$ y es paralelo a los vectores $\vec{a} \equiv (a_x, a_y, a_z)$ y $\vec{b} \equiv (b_x, b_y, b_z)$. El punto genérico $P \equiv (x, y, z)$ del plano debe cumplir con

$$P \in \pi \iff \vec{AP} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \iff \vec{OP} = \vec{OA} + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Para las coordenadas

$$P(\lambda, \mu) : \begin{cases} x = x_A + \lambda a_x + \mu b_x \\ y = y_A + \lambda a_y + \mu b_y \\ z = z_A + \lambda a_z + \mu b_z \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

Eliminando los parámetros λ y μ se obtiene la ecuación implícita

$$\begin{vmatrix} x - x_A & a_x & b_x \\ y - y_A & a_y & b_y \\ z - z_A & a_z & b_z \end{vmatrix} = 0. \quad (10)$$

Cambio de base

Sea $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ una base y un vector $\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3$. En otra base $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ el vector tendrá otras componentes $\vec{a} = \alpha'_1\vec{b}_1 + \alpha'_2\vec{b}_2 + \alpha'_3\vec{b}_3$. Para encontrar la relación entre la componentes hay que expresar la vieja base en función de la nueva

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= R_{11}\vec{b}_1 + R_{21}\vec{b}_2 + R_{31}\vec{b}_3 \\ \vec{e}_2 &= R_{12}\vec{b}_1 + R_{22}\vec{b}_2 + R_{32}\vec{b}_3 \\ \vec{e}_3 &= R_{13}\vec{b}_1 + R_{23}\vec{b}_2 + R_{33}\vec{b}_3.\end{aligned}\tag{11}$$

Substituyendo estas expresiones se obtiene

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (R_{11}\alpha_1 + R_{12}\alpha_2 + R_{13}\alpha_3)\vec{b}_1 \\ &\quad + (R_{21}\alpha_1 + R_{22}\alpha_2 + R_{23}\alpha_3)\vec{b}_2 \\ &\quad + (R_{31}\alpha_1 + R_{32}\alpha_2 + R_{33}\alpha_3)\vec{b}_3.\end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned}\alpha'_1 &= R_{11}\alpha_1 + R_{12}\alpha_2 + R_{13}\alpha_3 \\ \alpha'_2 &= R_{21}\alpha_1 + R_{22}\alpha_2 + R_{23}\alpha_3 \\ \alpha'_3 &= R_{31}\alpha_1 + R_{32}\alpha_2 + R_{33}\alpha_3.\end{aligned}$$

Usando el producto de matrices

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \alpha'_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \\ \vec{e}_1 &\equiv \begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{21} \\ R_{31} \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 \equiv \begin{pmatrix} R_{12} \\ R_{22} \\ R_{32} \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 \equiv \begin{pmatrix} R_{13} \\ R_{23} \\ R_{33} \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{12}$$

La independencia lineal de los vectores de la base implica que la matriz sea invertible

$$\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Propiedades afines y propiedades métricas del espacio

Hay problemas geométricos que dependen del paralelismo, como por ejemplo sumar vectores, encontrar ecuaciones de rectas y planos etc. En estos problemas sólo es necesario comparar las longitudes de segmentos que sean paralelos. Se dice que dependen de las propiedades **afines** del espacio y se pueden estudiar perfectamente con coordenadas oblicuas. Otros problemas requieren comparar las longitudes de segmentos con direcciones diferentes, como por ejemplo los que se refieren a esferas y circunferencias, magnitudes de ángulos, perpendicularidad etc. Estos problemas dependen de las propiedades **métricas** del espacio. Para estos problemas es más conveniente usar coordenadas cartesianas ortonormales.

Coordenadas cartesianas ortonormales

Considérese un sistema de coordenadas cartesiano, determinado por los puntos O , U , V y W . El sistema se dice ortonormal si los ejes son ortogonales (perpendiculares) entre sí,

$$\vec{OU} \perp \vec{OV}, \quad \vec{OU} \perp \vec{OW}, \quad \vec{OV} \perp \vec{OW}$$

y se usa la misma unidad en los tres ejes, o sea los tres vectores de la base tienen la misma norma o magnitud

$$\overline{OU} = \overline{OV} = \overline{OW} = u.$$

Cuando estamos simplemente estudiando geometría podemos considerar que u es un número que podemos igualar a uno $u = 1$. Si estamos hablando del espacio físico u es una longitud, o sea una magnitud física. La discusión de este punto la dejaremos para más adelante.

Para los sistemas de coordenadas ortogonales las proyecciones de un punto sobre los ejes se pueden obtener con proyecciones ortogonales, porque el plano xy es perpendicular al eje z .

Definición 19. Un vector \vec{a} es unitario si $|\vec{a}| = 1$.

Se usa escribir un acento circunflejo en vez de una flecha sobre el vector para indicar que es unitario $|\hat{a}| = 1$.

Definición 20. Se llama versor de un vector \vec{v} al vector unitario que tiene su misma dirección y sentido

$$\hat{v} = \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v}.$$

Definición 21. Un conjunto de vectores es ortonormal, si son unitarios y ortogonales entre sí.

Teorema 19. Los vectores de un conjunto ortonormal son linealmente independientes.

Las nomenclaturas más usadas para los versores de los ejes son

$$\vec{OU} = \hat{i} = \hat{x} = \hat{e}_1, \quad \vec{OV} = \hat{j} = \hat{y} = \hat{e}_2, \quad \vec{OW} = \hat{k} = \hat{z} = \hat{e}_3.$$

Teorema 20. Si $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ es una base ortonormal y $\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$ la norma del vector es

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

La demostración se obtiene con la aplicación sucesiva del teorema de Pitágoras, como se puede ver en la figura 2.8.

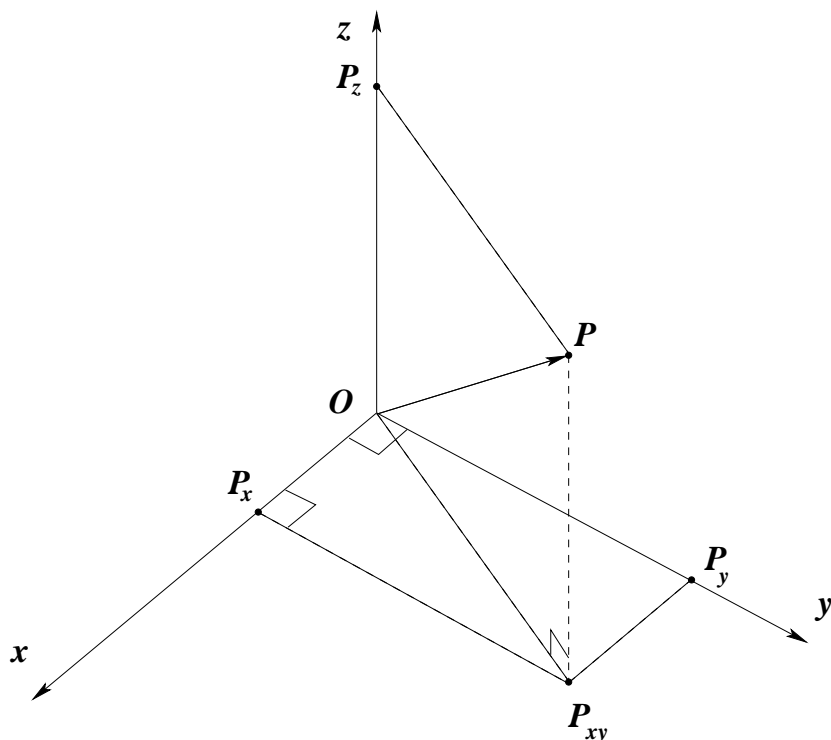


Fig. 2.8 Magnitud de un vector en coordenadas ortogonales

Consideremos un punto $P = (x, y, z)$ y sus proyecciones P_{xy} en el plano xy y P_x, P_y, P_z en los ejes. Los triángulos $OP_{xy}P$ y OP_xP_{xy} son rectángulos. La distancia entre el origen y P cumple con

$$\begin{aligned} \overline{OP}^2 &= \overline{OP_{xy}}^2 + \overline{P_{xy}P}^2 = \overline{OP_{xy}}^2 + \overline{OP_z}^2 \\ &= \overline{OP_x}^2 + \overline{P_xP_{xy}}^2 + \overline{OP_z}^2 = \overline{OP_x}^2 + \overline{OP_y}^2 + \overline{OP_z}^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2, \end{aligned}$$

de donde sacando la raíz se obtiene

$$|\vec{OP}| = \overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Componente de un vector sobre un eje. Producto escalar

Sean un vector \vec{a} y una recta orientada u (eje). Sea θ el ángulo entre el vector y el eje ($0 \leq \theta \leq \pi$). La componente a_u del vector sobre el eje es un número cuyo valor absoluto es la magnitud de la proyección ortogonal del vector sobre el eje y el signo es negativo si $\pi/2 < \theta \leq \pi$ y positivo si $0 \leq \theta < \pi/2$. Resulta $a_u = |\vec{a}| \cos(\theta)$.

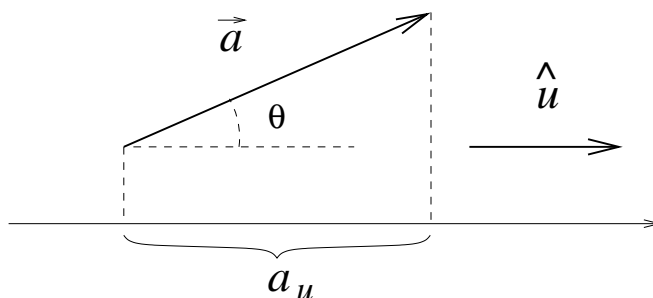


Fig. 2.9 Componente de un vector sobre un eje

Definición 22. Dados dos vectores \vec{a} y \vec{b} y el ángulo θ entre ellos se define el producto escalar de los dos vectores como

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\theta) .$$

El producto escalar se denota con un punto centrado \cdot entre los dos vectores.

La demostración de las siguiente cuatro propiedades del producto escalar se dejan al lector interesado.

Teorema 21. Dado un eje u con versor \hat{u} y un vector \vec{a} la componente de \vec{a} respecto al eje es $a_u = \vec{a} \cdot \hat{u}$.

Teorema 22. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$.

Teorema 23. El producto escalar es conmutativo, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

Teorema 24. El producto escalar es asociativo con el producto por un número

$$\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} .$$

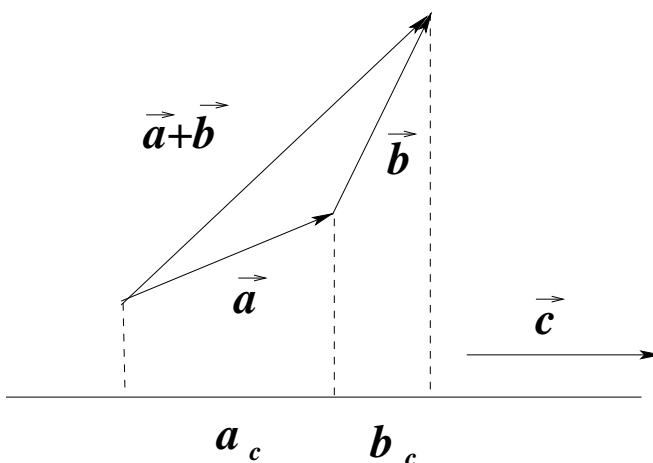


Fig. 2.10 Componente de una suma de vectores

Teorema 25. El producto escalar es distributivo

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} .$$

La demostración se basa en que las componentes se suman, como se puede ver en la figura 2.10. Si $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$ entonces la componente de \vec{d} es la suma de las componentes, $d_c = a_c + b_c$, y por lo tanto

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = d_c |\vec{c}| = (a_c + b_c) |\vec{c}| = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} .$$

Si definimos que el vector nulo sea ortogonal a cualquier vector, vale

Teorema 26. $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Para la base ortonormal $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ vale

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

y

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{i} \cdot \hat{k} = 0.$$

Con este resultado se obtiene fácilmente el siguiente teorema que permite calcular el producto conocidas las componentes de los vectores.

Teorema 27. Si $\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$ y $\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$ entonces

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

La demostración es una simple aplicación de las propiedades distributiva y asociativa.

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \cdot (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}) \\ &= a_x b_x \hat{i} \cdot \hat{i} + a_x b_y \hat{i} \cdot \hat{j} + a_x b_z \hat{i} \cdot \hat{k} + \\ &\quad a_y b_x \hat{j} \cdot \hat{i} + a_y b_y \hat{j} \cdot \hat{j} + a_y b_z \hat{j} \cdot \hat{k} + \\ &\quad a_z b_x \hat{k} \cdot \hat{i} + a_z b_y \hat{k} \cdot \hat{j} + a_z b_z \hat{k} \cdot \hat{k} \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \end{aligned}$$

Este teorema es de gran importancia práctica porque permite reducir los cálculos trigonométricos a cálculos algebraicos. Por ejemplo el ángulo θ entre dos vectores \vec{a} y \vec{b} se puede obtener con

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}. \quad (13)$$

Teorema 28. Si $\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$

$$a_x = \vec{a} \cdot \hat{i}, \quad a_y = \vec{a} \cdot \hat{j}, \quad a_z = \vec{a} \cdot \hat{k}.$$

Teorema 29. $\vec{a} = |\vec{a}|(\cos(\alpha)\hat{i} + \cos(\beta)\hat{j} + \cos(\gamma)\hat{k})$ donde α, β y γ son los ángulos que forma el vector con los ejes.

Las componentes del versor son los cosenos directores, $\hat{a} = \cos(\alpha)\hat{i} + \cos(\beta)\hat{j} + \cos(\gamma)\hat{k}$ y por lo tanto $\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$.

Descomposición de un vector

Dado un vector \vec{V} y un vector unitario \hat{u} existe una sola manera en la que el vector \vec{V} se descompone como la suma de vector paralelo y uno perpendicular a \hat{u} ,

$$\vec{V} = \vec{V}_{\parallel} + \vec{V}_{\perp} \quad \vec{V}_{\parallel} = (\vec{V} \cdot \hat{u})\hat{u}, \quad \vec{V}_{\perp} = \vec{V} - (\vec{V} \cdot \hat{u})\hat{u}. \quad (14)$$

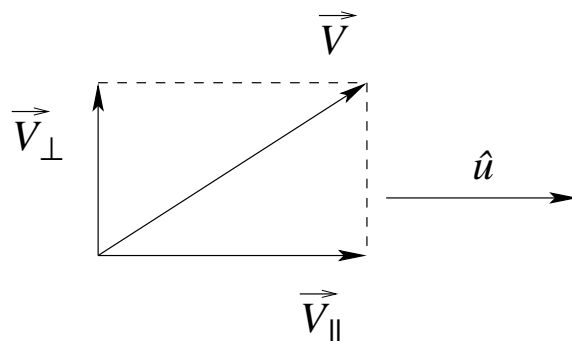


Fig. 2.11 Componentes paralela y perpendicular de un vector

Producto vectorial

Consideremos el paralelogramo formado por dos vectores \vec{a} y \vec{b} . si consideramos a \vec{a} como la base y si θ es el ángulo entre los vectores, la altura h será $|\vec{b}| \sin(\theta)$ y el área $|\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\theta)$.

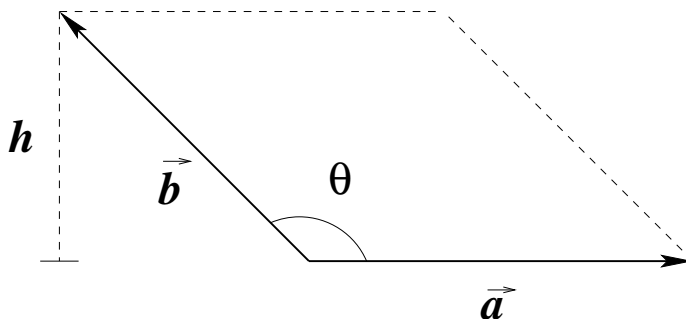


Fig. 2.12 Área de un paralelogramo

Se define otro producto entre vectores cuya magnitud es el área del paralelogramo que forman, pero en este caso el resultado no es un número sino un vector, por lo que se llama producto vectorial. Se denota con una cruz \times entre los dos vectores.

Definición 23. Dados dos vectores \vec{a} y \vec{b} y el ángulo θ entre ellos se define el producto vectorial como

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \iff \begin{cases} \vec{c} \in \mathcal{V} \\ |\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\theta) \\ \vec{c} \perp \vec{a} \text{ y } \vec{c} \perp \vec{b} \\ \text{el sentido se determina con la regla de la mano derecha} \end{cases}$$

Regla de la mano derecha. Si ponemos los dedos pulgar, índice y medio de la mano derecha de forma de que el medio sea perpendicular a los otros dos, y \vec{a} tiene el sentido del pulgar y \vec{b} tiene el sentido del índice entonces el producto $\vec{a} \times \vec{b}$ tiene el sentido del dedo medio.

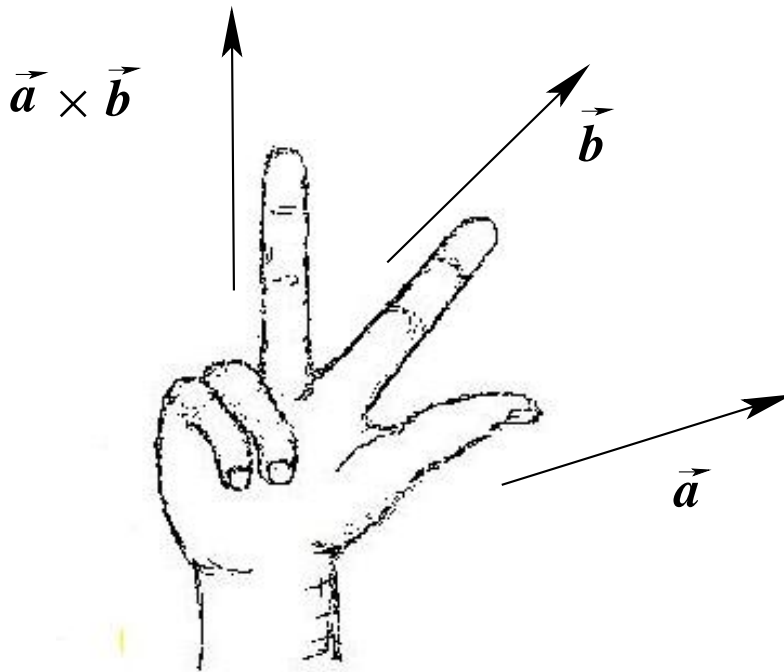


Fig. 2.13 Regla de la mano derecha

La razón de una definición tan peculiar es que no existe ninguna forma puramente geométrica de distinguir la derecha de la izquierda.

A diferencia del producto escalar el producto vectorial no es conmutativo, pero si es distributivo y asociativo con el producto con por número. No es asociativo con él mismo, en general $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

Teorema 30. El producto vectorial es anti-conmutativo

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} .$$

Teorema 31. El producto vectorial es asociativo con el producto por un número

$$(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) .$$

Si definimos que el vector nulo sea paralelo a cualquier otro vector vale

Teorema 32. $\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{a} \times \vec{b} = 0$

Teorema 33. $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$

Componente perpendicular y producto vectorial

La magnitud del producto vectorial de un vector unitario \hat{u} por un vector \vec{V} es igual a la magnitud de la componente perpendicular del vector $|\vec{V}_\perp| = |\vec{V}| \sin \theta$. El producto es por lo tanto igual a la componente perpendicular rotada un ángulo de 90° alrededor de \hat{u} , como se puede ver en la figura 2.14. Multiplicando dos veces obtenemos $\vec{V}_\perp = -\hat{u} \times (\hat{u} \times \vec{V})$.

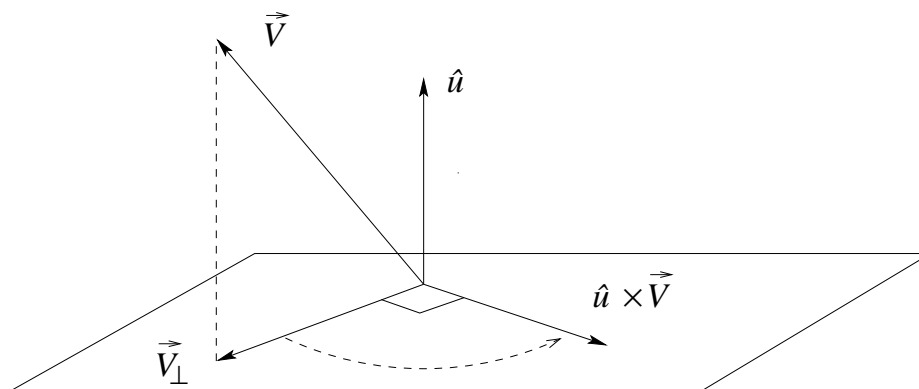


Fig. 2.14 Producto vectorial por un versor

Teorema 34. *El producto vectorial es distributivo*

$$\vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}.$$

Para demostrar esta importante propiedad basta constatar que la proyección de $\vec{a} + \vec{b}$ sobre el plano perpendicular a \vec{c} es igual a la suma de las proyecciones, como se puede deducir de la ecuación (14) (véase la figura 2.15),

$$(\vec{a} + \vec{b})_\perp = \vec{a}_\perp + \vec{b}_\perp.$$

Para obtener el producto vectorial hay que rotar un ángulo de 90° alrededor de \vec{c} y multiplicar por $|\vec{c}|$, operaciones que son ambas distributivas.

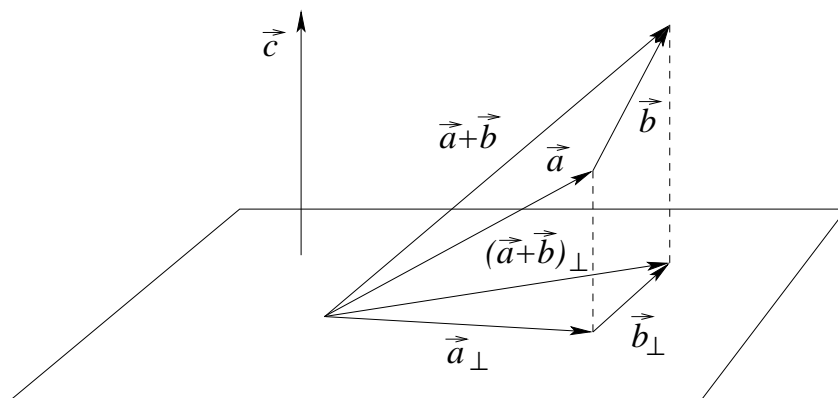


Fig. 2.15 Proyección ortogonal de una suma de vectores

Sistemas de coordenadas derechos e izquierdos

A los efectos de calcular los productos vectoriales hay dos tipos de sistemas de coordenadas. Los sistemas derechos en los que $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$ y los izquierdos en los que $\hat{x} \times \hat{y} = -\hat{z}$

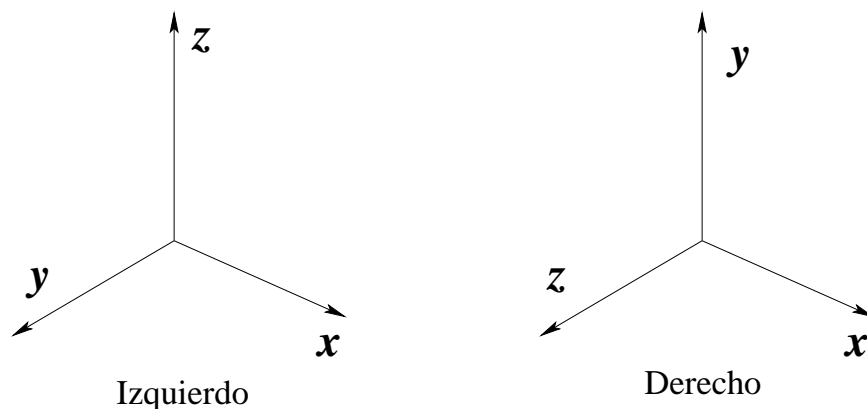


Fig. 2.16 Sistemas de coordenadas derechos e izquierdos

La fórmula para calcular el producto vectorial es diferente en los dos tipos de sistemas de coordenadas. Para simplificar la vida, cada vez que estemos tratando con productos vectoriales usaremos solamente sistemas de coordenadas *derechos*.

Nótese que un cambio de sistema de coordenadas que sea una simple rotación no puede cambiar el tipo de sistema. Para eso es necesario que haya una inversión o reflexión.

Teorema 35. Para una base ortonormal $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0 .$$

Si la base es derecha

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} , \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} , \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$

y si la base es izquierda

$$\hat{i} \times \hat{j} = -\hat{k} , \quad \hat{j} \times \hat{k} = -\hat{i} , \quad \hat{k} \times \hat{i} = -\hat{j} .$$

Usando estos resultados no presenta mayor problema probar el siguiente teorema.

Teorema 36. Si $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ es una base ortonormal derecha y si $\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$ y $\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$ entonces

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k} .$$

Este resultado se puede escribir de forma más compacta usando un determinante,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \end{vmatrix} .$$

Teorema 37. Si $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ es una base ortonormal izquierda y si $\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$ y $\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$ entonces

$$\vec{a} \times \vec{b} = - \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \end{vmatrix} .$$

La demostración de la siguiente identidad es bastante fácil aunque fastidiosa.

Teorema 38. $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$.

Producto triple

Se puede combinar el producto vectorial con uno escalar para obtener un escalar que se denomina producto triple. Usando los teoremas 27 y 36 podemos deducir el siguiente teorema.

Teorema 39. Para una base ortonormal derecha

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

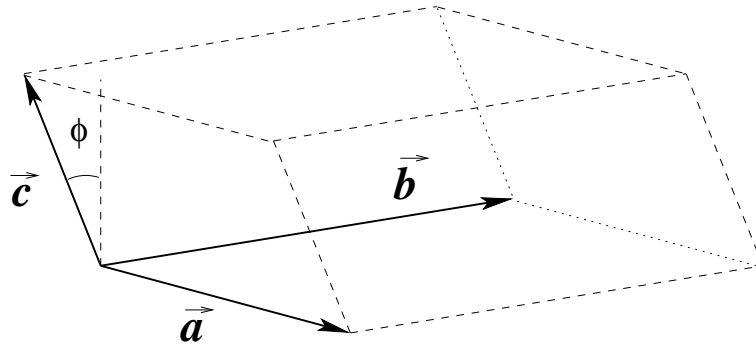


Fig. 2.17 Terna de vectores

El significado geométrico del producto triple es el de volumen del paralelepípedo formado por la terna de vectores $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos(\phi),$$

El área de la base es $|\vec{a} \times \vec{b}|$ mientras que $|\vec{c}| \cos(\phi)$ es la altura.

Si los vectores son coplanares el producto triple se anula.

Teorema 40. $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$.

Teorema 41. Sea una terna de vectores linealmente independientes $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Si la terna es derecha $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} > 0$ y si la terna es izquierda $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} < 0$.

Ecuación implícita de un plano

Busquemos la ecuación de un plano π perpendicular a un vector $\vec{N} \equiv (N_x, N_y, N_z)$ y que pase por un punto $A \equiv (x_A, y_A, z_A)$. El vector que va del punto A a un punto genérico del plano P debe ser perpendicular al vector \vec{N} ,

$$\vec{AP} \cdot \vec{N} = 0 .$$

Con las coordenadas

$$N_x(x - x_A) + N_y(y - y_A) + N_z(z - z_A) = 0 . \quad (15)$$

Viceversa si tenemos la ecuación implícita de un plano

$$ax + by + cz = d$$

podemos decir que el vector $\vec{N} \equiv (a, b, c)$ es perpendicular al plano.

Si en vez del vector perpendicular damos dos vectores paralelos \vec{a} y \vec{b} podemos poner $\vec{N} = \vec{a} \times \vec{b}$ con lo que la ecuación queda

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{AP} = 0.$$

y en coordenadas

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ (x - x_A) & (y - y_A) & (z - z_A) \end{vmatrix} = 0$$

que es idéntica a la ecuación (10) encontrada anteriormente.

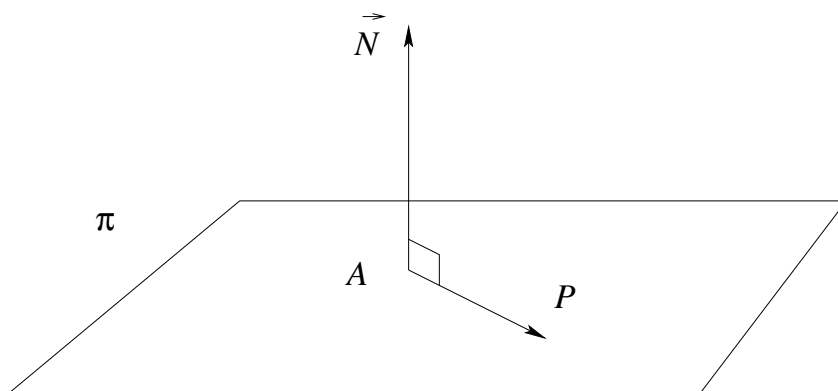


Fig. 2.18 Plano perpendicular a un vector

Distancia entre dos rectas del espacio

Como un ejemplo de como problemas geométricos aparentemente complejos se resuelven simplemente usando vectores, consideremos dos rectas r_1 y r_2 que pasan por los puntos A y B y son paralelas a los vectores \vec{a} y \vec{b} respectivamente. El problema es encontrar la distancia entre ellas. Sea C el punto de r_1 más cercano a r_2 y D el punto de r_2 más cercano a r_1 . El segmento CD debe necesariamente ser perpendicular a ambas rectas. Por lo tanto CD es paralelo a $\vec{a} \times \vec{b}$. Por otra parte C es la proyección ortogonal de A sobre la recta r_2 y D es la proyección de B . Por lo tanto lo que hay que hacer para encontrar la distancia es encontrar la componente de \vec{AB} en la dirección de CD . La distancia d es entonces

$$d = \overline{CD} = \frac{|\vec{AB} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}.$$

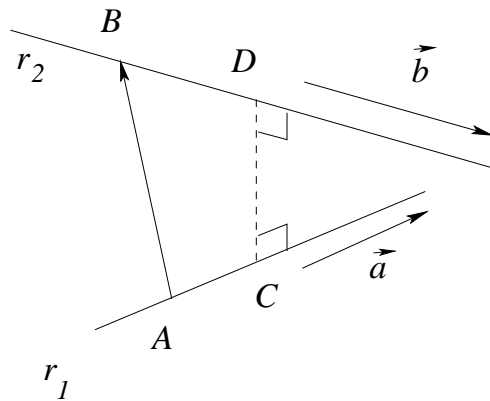


Fig. 2.19 Distancia entre dos rectas del espacio

Cambios de bases ortonormales

En el cambio de base estudiado anteriormente supongamos que ambas bases sean ortonormales. La vieja $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ y la nueva $\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3$. Como las bases son ortonormales la componente de \hat{e}_i en la dirección de \hat{b}_k , $R_{ki} = \hat{e}_i \cdot \hat{b}_k$ es igual a la componente de \hat{b}_k en la dirección de \hat{e}_i . Esto es la matriz que da la nueva base en función de la vieja es la traspuesta de la anterior (11),

$$\begin{aligned} \hat{b}_1 &= R_{11}\hat{e}_1 + R_{12}\hat{e}_2 + R_{13}\hat{e}_3 \\ \hat{b}_2 &= R_{21}\hat{e}_1 + R_{22}\hat{e}_2 + R_{23}\hat{e}_3 \\ \hat{b}_3 &= R_{31}\hat{e}_1 + R_{32}\hat{e}_2 + R_{33}\hat{e}_3. \end{aligned} \tag{16}$$

O sea para cambios de bases ortonormales la inversa de la matriz de transformación coincide con la traspuesta. Las matrices que tiene esa propiedad se llaman *ortogonales*. Supongamos que la base vieja $\{\hat{e}_k\}$ sea una base derecha. Entonces el producto triple de la nueva base es igual al determinante de la matriz de transformación. Será 1 si la nueva base también es derecha y -1 si la nueva base es izquierda. Las matrices ortogonales que tienen determinante 1 se llaman rotaciones propias. Las que tienen -1 rotaciones impropias. Por ejemplo una reflexión con respecto al plano xy es una rotación impropia,

$$\hat{b}_1 = \hat{e}_1, \quad \hat{b}_2 = \hat{e}_2, \quad \hat{b}_3 = -\hat{e}_3.$$

Magnitudes físicas escalares y vectoriales

En Física se llama escalares a las magnitudes que no se modifican cuando se cambia el sistema de coordenadas. Por ejemplo la distancia entre dos puntos, el tiempo, la masa, etc. También hay magnitudes vectoriales, que tienen tres componentes que se transforman como las componentes de los vectores geométricos. Como la matriz de transformación no tiene dimensiones (son números) las tres componentes de una magnitud vectorial deben tener las mismas dimensiones. Un aspecto importante de las magnitudes vectoriales es que no solamente se pueden multiplicar por un número sino que también se pueden multiplicar por una magnitud escalar con dimensiones. En este caso se obtiene **otra** magnitud vectorial. O sea es otro espacio vectorial. Consideremos por ejemplo los vectores desplazamiento que para el espacio físico corresponden a los vectores geométricos que hemos venido estudiando. Los desplazamientos tienen dimensiones de longitud. La magnitud de un desplazamiento \vec{AB} es una longitud. Entonces el versor en la dirección de \vec{AB} ,

$$\hat{v} = \frac{1}{|\vec{AB}|} \vec{AB}$$

no tiene dimensiones y por lo tanto no es un desplazamiento. Para los vectores desplazamiento la operación $\vec{AB} + \hat{v}$ es inválida.

Como los versores no tienen dimensiones son los mismos para todas las magnitudes vectoriales. Las dimensiones están en las componentes o coordenadas. Si $\vec{d} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ es un desplazamiento x , y y z tienen dimensiones de longitud. Simultáneamente puede haber una fuerza $\vec{F} = f_x\hat{i} + f_y\hat{j} + f_z\hat{k}$. Las componentes tienen dimensiones de fuerza y no son homogéneas con el desplazamiento, pero los versores \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} son los mismos. El espacio vectorial de las fuerzas es diferente al espacio de los desplazamientos.

Otro ejemplo. Si nos desplazamos del punto A al B en un tiempo t la velocidad vectorial media está dada por

$$\vec{v} = \frac{1}{t} \vec{AB}$$

que es una magnitud vectorial pero no es un desplazamiento porque tiene dimensiones lt^{-1} .

Transformaciones activas y pasivas. Inversión espacial

Consideremos un cambio de sistema de coordenadas compuesto por una translación y una rotación de los ejes. La posición de cualquier partícula queda igual pero sus nuevas coordenadas son diferentes. A esto lo llamamos una transformación de coordenadas **pasiva**. Pero podemos obtener el mismo cambio de coordenadas de otra manera. Se deja igual el sistema de coordenadas y se traslada y rota a todas las partículas del sistema físico en estudio, con la translación y rotación inversas. A esto se le llama la transformación **activa**. Cuando la rotación es propia no hay mayor problema, pero cuando es impropia como por ejemplo una inversión espacial, la transformación activa implica la reconstrucción de todos los objetos para formar su imagen especular, lo cual en la práctica es imposible. Sin embargo siempre podemos imaginarnos como se comportaría un hipotético sistema invertido.

Vectores polares y vectores axiales. Escalares impares

Ante una inversión espacial activa los desplazamientos cambian signo $\vec{d} \rightarrow -\vec{d}$. Los vectores que se comportan de esa manera son los vectores **polares**. Veamos en cambio como se comporta el producto vectorial de dos vectores polares

$$\vec{a} \times \vec{b} \rightarrow (-\vec{a}) \times (-\vec{b}) = \vec{a} \times \vec{b}$$

O sea el producto no cambia signo. Vectores que se comporten como el producto vectorial son los vectores **axiales**. La razón de este comportamiento es que una inversión activa convierte una mano derecha en izquierda, pero la regla a aplicar debe seguir siendo la de la mano derecha. El producto vectorial de un vector polar por un vector axial es un vector polar. El producto de dos vectores axiales es un vector axial.

Son vectores polares el desplazamiento, la velocidad y la fuerza. Son vectores axiales la velocidad angular, el torque y el campo magnético.

El producto escalar de un vector polar por uno axial cambia signo ante la inversión activa. Magnitudes con esa propiedad se dicen escalares **impares**. Un ejemplo es el producto triple de tres vectores polares. El cambio de signo se debe a que las ternas izquierdas se convierten en derechas y viceversa.

Pseudovectores y pseudoescalares

Con la definición que hemos dado de producto vectorial (definición 23) el resultado se comporta como un vector, o sea en los cambios de base se transforma como los vectores geométricos. El producto triple es un escalar: es invariante ante todo cambio de coordenadas.

Sin embargo, algunas veces se define el producto vectorial con el determinante de la fórmula del teorema 36. En ese caso el producto no es en realidad un vector, se transforma como vector solamente en las rotaciones propias. En las rotaciones impropias cambia signo. Decimos que es un pseudovector. Análogamente el producto triple no sería un verdadero escalar, cambiaría signo en las rotaciones impropias. Decimos que es un pseudoescalar.

Si nos limitamos a usar bases derechas no hay diferencia entre las dos definiciones y los conceptos de vector axial y pseudovector coinciden.

Capítulo 3

Cinemática

Marco de referencia y sistema de coordenadas

La Cinemática es la parte de la Mecánica que se ocupa de la descripción de los movimientos. El nombre proviene del griego $\kappa\iota\nu\eta\mu\alpha$ que significa movimiento. Lo primero que se necesita para estudiar un movimiento es establecer el marco de referencia, o sea los cuerpos que consideramos en reposo, un sistema de coordenadas y un tiempo común a todo el marco de referencia. Una partícula en movimiento ocupará diferentes posiciones $P(t) \equiv (x(t), y(t), z(t))$ al transcurrir del tiempo. Toda la información sobre el movimiento está contenida en las funciones $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$.

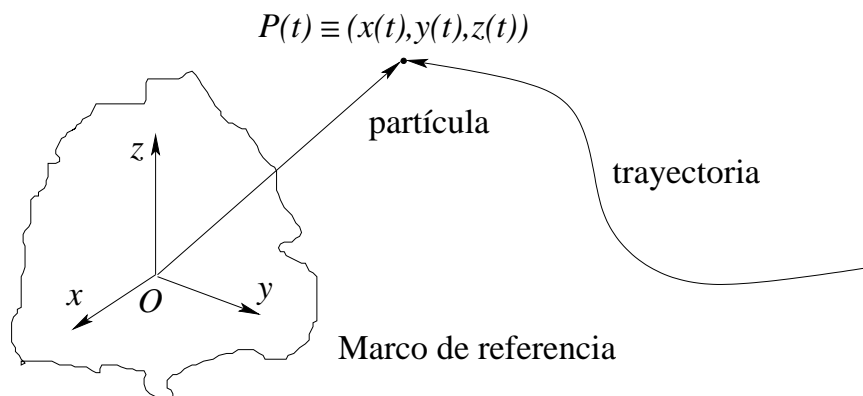


Fig. 3.1 Partícula en movimiento

Trayectoria y ley horaria

Los puntos ocupados sucesivamente por el móvil forman una curva que se llama **trayectoria**. El movimiento mismo es una ecuación paramétrica de la trayectoria. La trayectoria y la manera como se la recorre determinan el movimiento. En muchos casos los movimientos suceden en trayectorias preestablecidas, como por ejemplo el movimiento de un tren sobre sus rieles.

La posición del móvil sobre la trayectoria se puede encontrar con una coordenada curvilínea. Esta se establece de la siguiente manera. Se escoge un punto de la trayectoria O como origen y un sentido positivo para recorrer la curva. El valor absoluto de la coordenada s de un punto P representa la distancia, medida a lo largo de la trayectoria, entre un origen O y el punto P , esto es la longitud del arco \widehat{OP} . El signo es positivo si el arco \widehat{OP} tiene el mismo sentido que el escogido para la curva. El ejemplo típico son los kilómetros en una carretera.

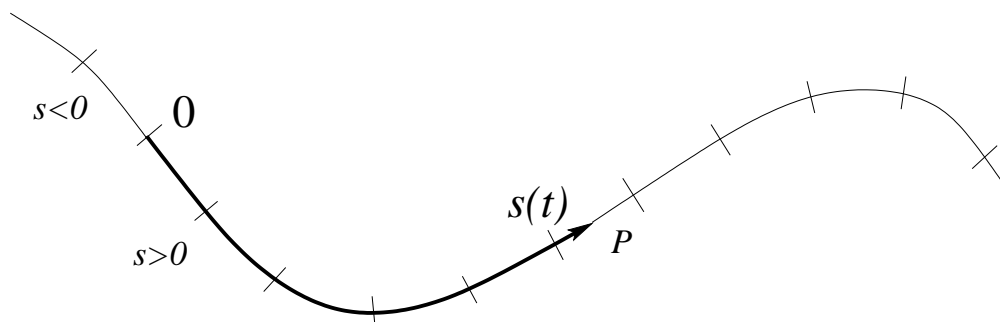


Fig. 3.2 Coordenada curvilínea sobre la trayectoria

Fijada la trayectoria, el movimiento está determinado por el valor de la coordenada en función del tiempo $s(t)$. Esta función se llama **ley horaria**. Este nombre proviene de los controladores de trenes. En la figura 3.3 se presenta el gráfico de una ley horaria. Veamos qué podemos deducir sobre el movimiento a partir del gráfico.

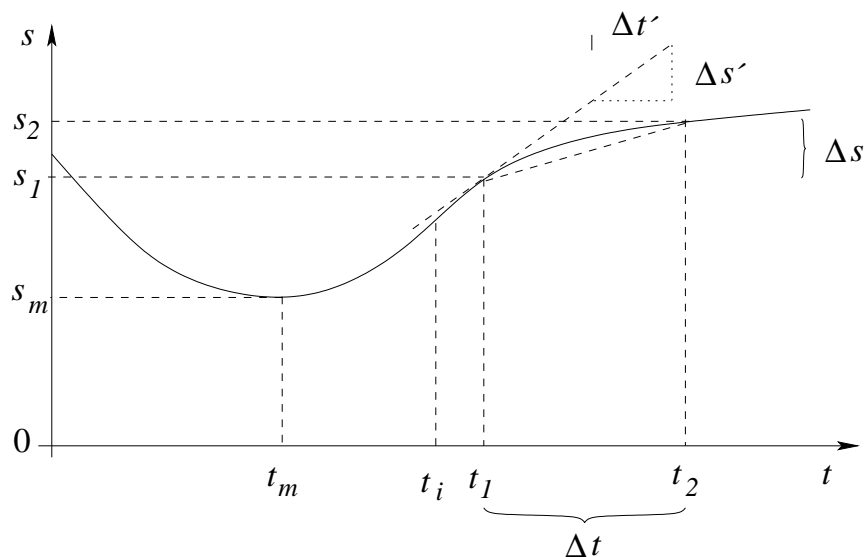


Fig. 3.3 Ley horaria

Para tiempos menores que t_m la coordenada s disminuye, el móvil se acerca al origen y el movimiento es en el sentido negativo. En el instante t_m la partícula llega al valor mínimo

Capítulo 3: Cinemática

de la coordenada s_m . Para instantes posteriores el movimiento es en sentido positivo (s creciente) alejándose del origen.

Esto con respecto al sentido del movimiento. ¿Qué podemos decir sobre la rapidez del movimiento? A medida que el móvil se acerca al punto de retorno ($s = s_m$) el movimiento se hace más lento, se para instantáneamente en el instante t_m y luego se mueve en sentido contrario cada vez más rápidamente. Posteriormente el movimiento se enlentece nuevamente. El movimiento es más rápido en el instante t_1 que en t_2 . ¿Qué aspecto del gráfico usamos para hacer estas afirmaciones? La inclinación de la curva. A mayor inclinación mayor rapidez. La pendiente es la medida de la inclinación de algo, por ejemplo decimos que una rampa tiene una pendiente de 10% si sube diez centímetros por cada metro de desplazamiento horizontal. Podemos usar la pendiente de la curva del gráfico para medir la rapidez. Por ejemplo la pendiente de la recta secante a la curva que pasa por los puntos (t_1, s_1) y (t_2, s_2) del gráfico es una medida de la velocidad promedio en el lapso $[t_1, t_2]$.

Velocidad escalar media

Si el móvil se desplaza de la posición s_1 a la s_2 en el lapso de t_1 a t_2 , la velocidad escalar media en el lapso $[t_1, t_2]$ es

$$\bar{v} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (17)$$

El signo de la velocidad indica el sentido del movimiento. El valor absoluto es la rapidez. Las dimensiones de la velocidad son $[v] = lt^{-1}$. No hay un nombre especial para la unidad de velocidad. La unidad internacional es el m/s pero también se usa mucho el km/hora.

Velocidad escalar instantánea

Para definir la velocidad en un instante hay que usar la pendiente de la recta tangente. Al acercar el punto t_2 al punto t_1 la recta secante se aproxima a la tangente, por lo tanto la pendiente de la secante (la velocidad media) se aproxima a la pendiente de la tangente (la velocidad instantánea). Esto no es sino la definición de **derivada** de la función $s(t)$ con respecto al tiempo t . En el apéndice I se presentan algunas propiedades de las derivadas. La velocidad en el instante t_1 es entonces

$$v(t_1) = \frac{\Delta s'}{\Delta t'} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=t_1}.$$

Intuitivamente la derivada es la división del incremento infinitesimal ds entre el incremento infinitesimal dt . En general

$$v(t) = \frac{ds}{dt}. \quad (18)$$

En la figura 3.4 hay el gráfico de la velocidad contra el tiempo correspondiente a la curva horaria de la figura 3.3. En el instante t_m la velocidad se anula y en el punto de inflexión t_i la velocidad se hace máxima. Para tiempos anteriores a t_m la velocidad es negativa, para $t > t_m$ es positiva.

Como cantidad con signo la velocidad crece continuamente para $t < t_i$ y decrece para $t > t_i$. En cambio la rapidez decrece para $t < t_m$, crece para $t_m < t < t_i$ y decrece para $t > t_i$. Llamamos movimiento retardado uno el que la rapidez decrece. El movimiento es retardado para $t < t_m$ y para $t > t_i$.

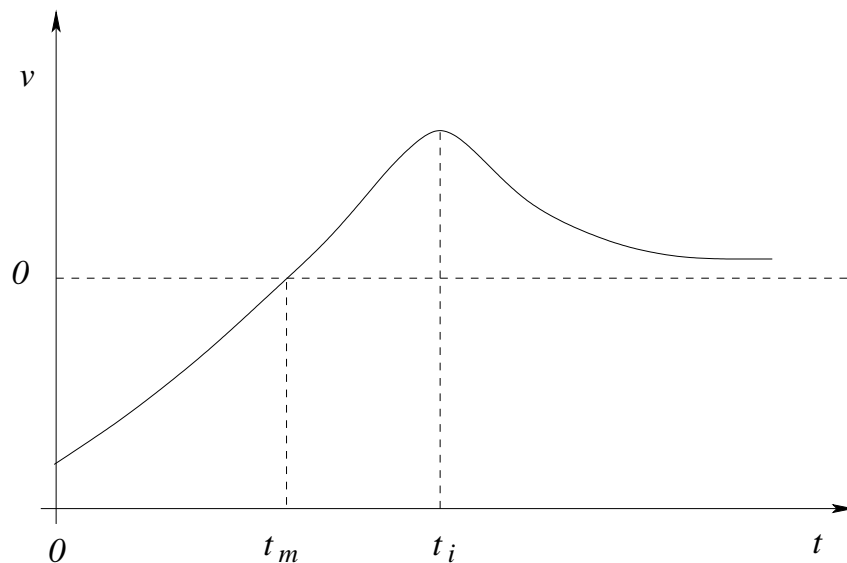


Fig. 3.4 v vs. t para la curva horaria de la figura 3.3

Aceleración escalar

Para describir la forma en la que varía la velocidad de un móvil se usa la aceleración escalar a , que definimos como la derivada de la velocidad respecto al tiempo

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}. \quad (19)$$

Las dimensiones de la aceleración son $[a] = lt^{-2}$ y la unidad es el m/s^2 .

La aceleración es positiva en las regiones en las que la curva horaria tiene la concavidad hacia arriba y negativa en las partes con la concavidad es hacia abajo. La aceleración se anula en los puntos de inflexión, donde la velocidad tiene máximos o mínimos. En la siguiente figura se grafica la aceleración correspondiente a la ley horaria de la figura 3.3

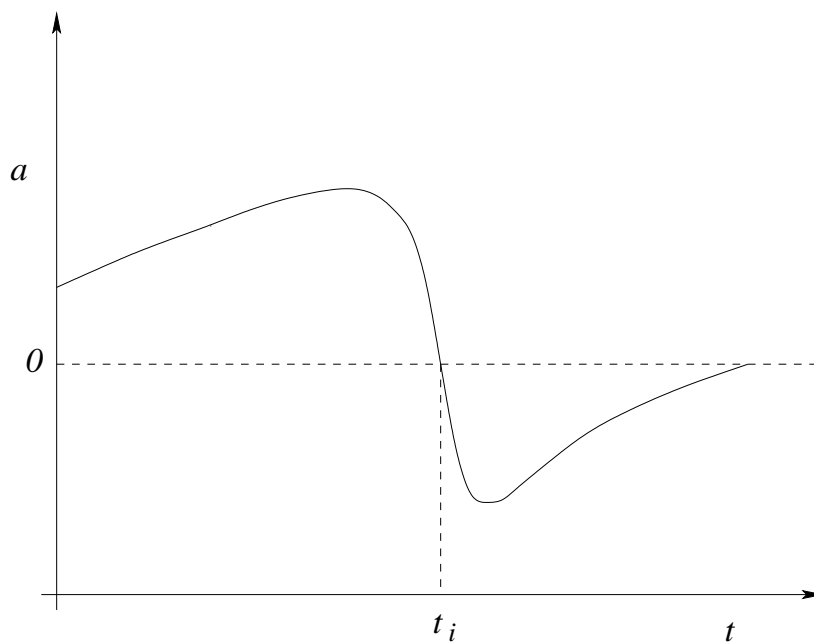


Fig. 3.5 a vs. t para la curva horaria de la figura 3.3

Capítulo 3: Cinemática

El movimiento en el que la rapidez disminuye ($\frac{d|v|}{dt} < 0$) es retardado. Esto sucede cuando la aceleración y la velocidad tienen sentidos opuestos. Cuando $av > 0$ la rapidez aumenta. Algunas veces se dice acelerado el movimiento en el que la rapidez aumenta, lamentablemente esta nomenclatura es ambigua porque un movimiento retardado también es acelerado en el sentido de que tiene aceleración, aunque esta sea opuesta a la velocidad.

Movimiento uniforme

El movimiento uniforme es el que tiene velocidad constante, esto es aceleración cero.

$$v(t) = v_0 .$$

La curva horaria debe tener pendiente constante, o sea es una recta, lo que corresponde a la función afín

$$s(t) = s_0 + v_0 t . \quad (20)$$

La constante s_0 es la posición en el tiempo cero.

Movimiento uniformemente acelerado

Es el movimiento que tiene aceleración constante,

$$a(t) = a_0 .$$

La función $v(t)$ debe ser la función afín,

$$v(t) = v_0 + a_0 t .$$

La constante v_0 es la velocidad al instante $t = 0$.

La ley horaria es un poquito más complicada de encontrar. La función t^2 tiene como derivada $2t$, entonces la posición debe ser

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 . \quad (21)$$

La constante s_0 es la posición al tiempo cero. La curva horaria resulta una parábola. El vértice de la parábola corresponde a un punto de retorno en el que la velocidad se anula. Para tiempos anteriores al punto de retorno ($t = -v_0/a_0$) el movimiento es retardado.

Movimiento oscilatorio armónico simple

Como un ejemplo menos trivial consideremos la siguiente ley horaria

$$s = A \sin(\omega t) , \quad (22)$$

donde A es una constante con dimensiones de longitud y ω es una constante con dimensiones de inverso de tiempo. El movimiento es una oscilación de período $T = 2\pi/\omega$ y **amplitud** A . La constante ω se llama **frecuencia angular**. La frecuencia, o sea el número de oscilaciones por unidad de tiempo es $f = 1/T = \omega/(2\pi)$. La unidad de frecuencia es el hercio ($1\text{Hz} = 1\text{s}^{-1}$). El argumento del seno se llama **fase**.

La velocidad es

$$v = \frac{ds}{dt} = A \frac{d \sin(\omega t)}{d\omega t} \frac{d\omega t}{dt} = A\omega \cos(\omega t) \quad (23)$$

y la aceleración

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t) . \quad (24)$$

Vale la relación

$$a = -\omega^2 s. \quad (25)$$

El problema inverso

Supongamos que conocemos la función $v(t)$ y queremos encontrar el desplazamiento del cuerpo entre un instante inicial t_i y uno final t_f . Si el movimiento fuera uniforme con velocidad v_0 la solución sería muy fácil,

$$\Delta s = s_f - s_i = v_0(t_f - t_i) .$$

El problema está en que v varía en ese lapso. No podemos dar el resultado exacto pero sí podemos acotar el resultado. Si v_M y v_m son los valores máximo y mínimo de v en el lapso, debe ser

$$v_m(t_f - t_i) \leq \Delta s \leq v_M(t_f - t_i) .$$

Mientras menos cambie v , o sea mientras más cercanos estén v_m y v_M más exacta es la estimación. Podemos mejorar la estimación si subdividimos el lapso en n intervalos de ancho $\Delta t = (t_f - t_i)/n$, intervalos que podemos numerar con un índice k que va de 1 a n . En el lapso k , el desplazamiento es Δs_k , la velocidad mínima en el lapso será v'_k y la máxima v''_k . Se cumple para cada intervalo

$$v'_k \Delta t \leq \Delta s_k \leq v''_k \Delta t .$$

Sumemos ahora las n desigualdades

$$\Delta s = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \cdots + \Delta s_n = \sum_{k=1}^n \Delta s_k ,$$

$$\sum_{k=1}^n v'_k \Delta t \leq \Delta s \leq \sum_{k=1}^n v''_k \Delta t .$$

Capítulo 3: Cinemática

Si n aumenta la suma de los mínimos aumenta y la suma de los máximos disminuye. Se puede demostrar que si $v(t)$ es continua, y una velocidad siempre lo es, existe un límite común para ambas sumas

$$\Delta s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n v'_k \Delta t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n v''_k \Delta t .$$

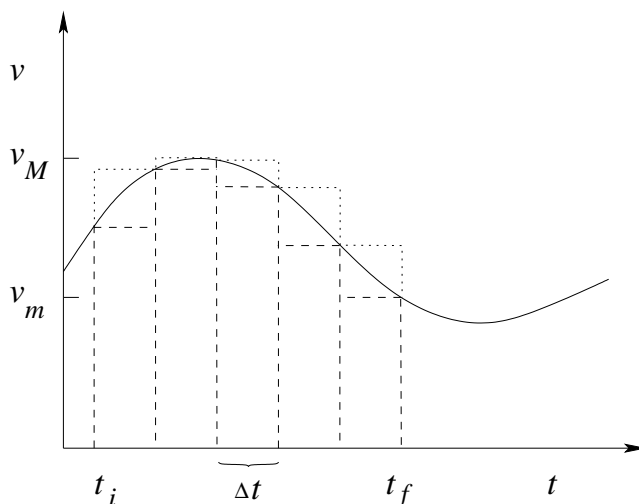


Fig. 3.6 Lapso dividido en 5 intervalos

Nótese que en el gráfico v vs. t (ver figura 3.6) los productos $v'_k \Delta t$ son las áreas de los rectángulos que están bajo la curva y los productos $v''_k \Delta t$ son las áreas de los rectángulos que están por arriba de la curva. Por lo tanto si el límite común existe debe ser igual al área que hay entre el eje t y la curva $v(t)$.

En matemática el límite común de las dos sumas es la integral definida en el intervalo,

$$\int_{t_i}^{t_f} v(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n v'_k \Delta t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n v''_k \Delta t .$$

El significado original del símbolo de integral \int era una “S” de suma distorsionada. Intuitivamente lo que nos dice el símbolo es: Sume las áreas de los rectángulos de ancho infinitesimal dt y altura $v(t)$, para los tiempos comprendidos entre t_i y t_f . Tenemos entonces,

$$s_f = s_i + \int_{t_i}^{t_f} v(t) dt \tag{26}$$

y análogamente

$$v_f = v_i + \int_{t_i}^{t_f} a(t) dt . \tag{27}$$

Propiedades de las integrales

Sigue un compendio de propiedades de las integrales.

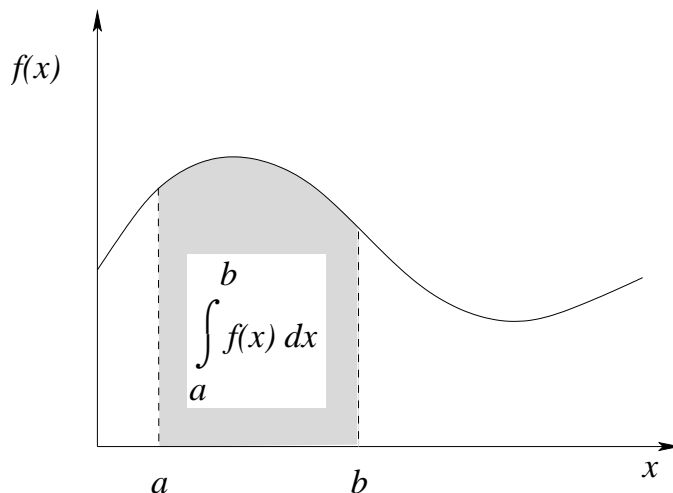


Fig. 3.7 Integral definida en el intervalo $[a, b]$

Propiedades de las integrales definidas.

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx .$$

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx .$$

Teorema fundamental del cálculo integral.

Sea una función $f(x)$. Definamos la función $F(x)$ como

$$F(x) = \int_a^x f(u) du + F(a)$$

entonces

$$\frac{dF}{dx} = f(x) .$$

Cambio de variable.

$x = g(u)$, $a = g(v)$ y $b = g(w)$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_v^w f[g(u)] \frac{dg}{du} du$$

Primitivas.

$$\frac{dF}{dx} = f(x) \quad \text{y} \quad \frac{dG}{dx} = f(x) \iff F(x) - G(x) = \text{constante} .$$

Integrales indefinidas.

$$F(x) = \int f(x) dx \iff \frac{dF}{dx} = f(x) .$$

Propiedades de las integrales indefinidas

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx .$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha+1} \quad \text{para } \alpha \neq -1$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x)$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x)$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1}(x)$$

Vectores velocidad y aceleración

Para el movimiento en dos y tres dimensiones se puede definir el vector velocidad como

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{OP}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (\vec{OP}(t + \Delta t) - \vec{OP}(t)) \\ &= \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} + \frac{dz}{dt} \hat{k} . \end{aligned} \tag{28}$$

Las proyecciones de P sobre los ejes, P_x , P_y y P_z se mueven con movimiento rectilíneo con velocidades escalares $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ y $\frac{dz}{dt}$ respectivamente. Análogamente la aceleración vectorial es

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y}{dt} \hat{j} + \frac{dv_z}{dt} \hat{k} . \tag{29}$$

Las componentes de \vec{a} son las aceleraciones escalares de los movimientos de las proyecciones.

Movimiento con aceleración constante

Consideremos un movimiento con una aceleración constante

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_0$$

Integrando

$$d\vec{v} = \vec{a}_0 dt$$

$$\int_0^t d\vec{v} = \vec{a}_0 \int_0^t dt$$

$$\vec{v}(t) - \vec{v}(0) = t\vec{a}_0$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0) + t\vec{a}_0 .$$

Integrando nuevamente obtenemos la posición

$$\frac{d\vec{OP}}{dt} = \vec{v}(0) + t\vec{a}_0$$

$$\int d\vec{OP} = \int_0^t [\vec{v}(0) + t\vec{a}_0] dt$$

$$\vec{OP}(t) = \vec{OP}(0) + t\vec{v}(0) + \frac{1}{2}t^2\vec{a}_0 \quad (30)$$

La trayectoria es una parábola que se encuentra en un plano paralelo a la aceleración \vec{a}_0 y a la velocidad inicial $\vec{v}(0)$. En el caso de que $\vec{a}_0 = 0$, el movimiento es rectilíneo uniforme

$$\vec{OP}(t) = \vec{OP}(0) + t\vec{v}(0) . \quad (31)$$

Para ver mejor que la trayectoria es parabólica podemos poner

$$\vec{a}_0 = a_0\hat{j} , \quad \text{y} \quad \vec{v}(0) = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j} ,$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}t \\ y(t) = y_0 + tv_{0y} + \frac{1}{2}t^2a_0 \end{cases}$$

En la dirección x , perpendicular a la aceleración, el movimiento es uniforme. En la dirección y , paralela a la aceleración, el movimiento es uniformemente acelerado.

Propiedades locales de la trayectoria

La ley horaria describe la manera como el móvil recorre la trayectoria. La velocidad escalar y la aceleración escalar dan información de ese movimiento en un instante. Los vectores velocidad y aceleración, contienen, además de esa información, información sobre el comportamiento de la trayectoria en el punto. Para estudiar la propiedades de la trayectoria es conveniente usar las ecuaciones paramétricas de la trayectoria en las que el parámetro es la coordenada curvilínea, $\vec{OP}(s)$.

Una primera propiedad es la dirección de la trayectoria. La dirección de una curva en un punto se define como la dirección de la recta tangente a la curva. La recta tangente es la recta que mejor aproxima la curva en el punto, véase la figura 3.8.

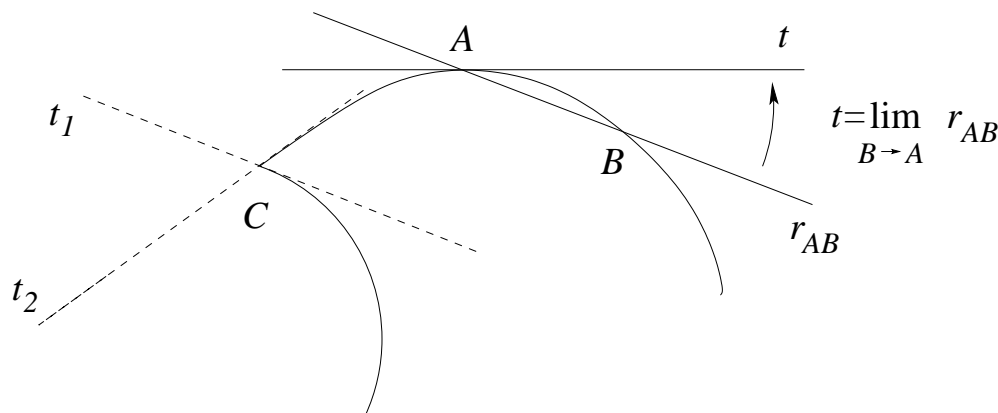


Fig. 3.8 Rectas tangentes a una curva

A es un punto regular que tiene una tangente t que es el límite de la secante r_{AB} cuando $B \rightarrow A$. El punto C es una cúspide que tiene dos tangentes t_1 y t_2 .

Consideremos el vector $\vec{\tau}$ que se obtiene derivando el vector posición con respecto a la coordenada curvilínea s

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{OP}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\vec{OP}(s + \Delta s) - \vec{OP}(s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\overline{P(s)P(s + \Delta s)}}{\Delta s}. \quad (32)$$

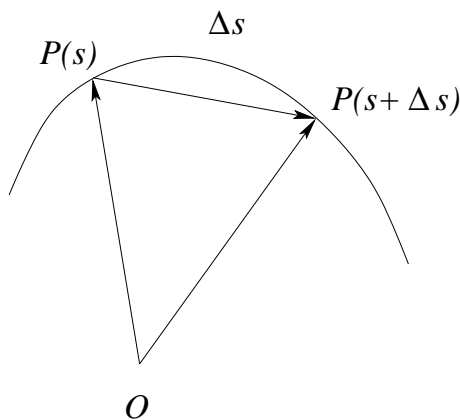


Fig. 3.9 Versor tangente

Por la definición de tangente, la recta que pasa por los puntos $P(s)$ y $P(s + \Delta s)$ tiende a la recta tangente en el límite $\Delta s \rightarrow 0$. Por lo tanto el vector $\vec{\tau}$ tiene la dirección de la

tangente. Por otra parte la longitud de la cuerda $P(s)P(s + \Delta s)$ y la del arco Δs tienden a ser iguales en el límite $\Delta s \rightarrow 0$,

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0^+} \frac{|\overrightarrow{P(s)P(s + \Delta s)}|}{\Delta s} = 1 .$$

En resumen el vector $\vec{\tau}$ es unitario, tangente a la curva y apunta en el sentido en el que crece la coordenada s .

Además de la dirección otra propiedad que tiene la trayectoria en un punto es la **curvatura**. La curvatura se mide como el inverso del radio de la circunferencia que más se aproxima a la curva en un punto. Esta circunferencia se llama circunferencia **osculadora** u **osculatriz** (del latín *osculum*, beso). En la figura 3.10 se explica como se define. El radio de la circunferencia osculadora es el radio de curvatura y su centro el centro de curvatura. El plano que contiene al centro de curvatura y a la recta tangente es el plano osculador.

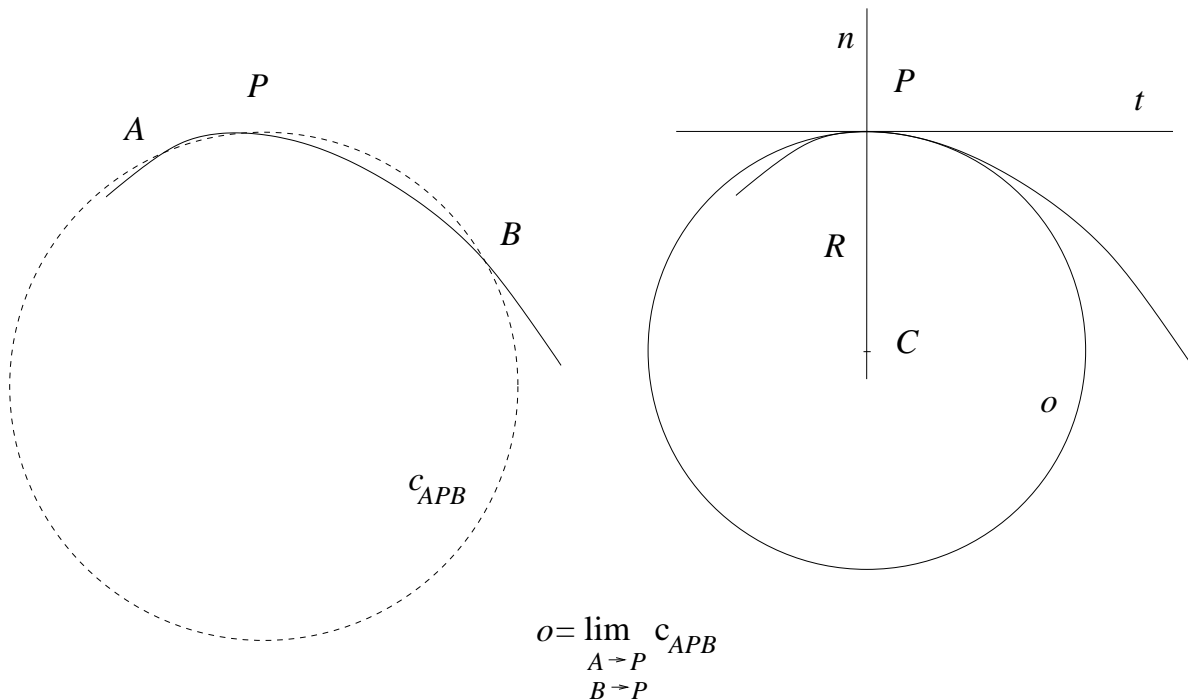


Fig. 3.10 Circunferencia osculadora

Por el punto regular P de la curva y dos puntos adyacentes A y B pasa una sola circunferencia c_{APB} . La circunferencia osculadora o es el límite de c_{APB} cuando $A \rightarrow P$ y $B \rightarrow P$. Esta circunferencia comparte la tangente t con la curva y su centro C está en una recta n perpendicular a la tangente t y se denomina **centro de curvatura**. Su radio R es el **radio de curvatura**.

La curvatura se calcula con la derivada del versor tangente $\vec{\tau}$ con respecto a la coordenada curvilínea s .

$$\frac{1}{R} = \left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right| = \left| \frac{d^2 \vec{OP}}{ds^2} \right| .$$

Como el vector $\vec{\tau}$ es unitario su derivada es ortogonal él

$$\vec{\tau} \cdot \vec{\tau} = 1 \implies \vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} = 0 ,$$

entonces

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{R}\hat{n}, \quad \hat{n} \cdot \vec{\tau} = 0. \quad (33)$$

El versor normal \hat{n} apunta hacia el centro de curvatura C

$$\vec{PC} = R\hat{n}. \quad (34)$$

Curvatura de una circunferencia

Como ejemplo demostraremos que efectivamente la curvatura de una circunferencia es el inverso de su radio. Escribamos las ecuaciones en coordenadas polares de circunferencia del plano xy centrada en el origen y de radio R ,

$$\vec{OP} = R(\cos(\theta)\hat{i} + \sin(\theta)\hat{j}).$$

El arco es igual a $s = R\theta$. El vector $\hat{\tau}$ es

$$\hat{\tau} = \frac{d\vec{OP}}{ds} = \frac{1}{R} \frac{d\vec{OP}}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(\cos(\theta)\hat{i} + \sin(\theta)\hat{j}) = -\sin(\theta)\hat{i} + \cos(\theta)\hat{j}.$$

La derivada de $\hat{\tau}$ es

$$\frac{d\hat{\tau}}{ds} = \frac{1}{R} \frac{d\hat{\tau}}{d\theta} = \frac{1}{R} \frac{d}{d\theta}(-\sin(\theta)\hat{i} + \cos(\theta)\hat{j}) = -\frac{1}{R}(\cos(\theta)\hat{i} + \sin(\theta)\hat{j}).$$

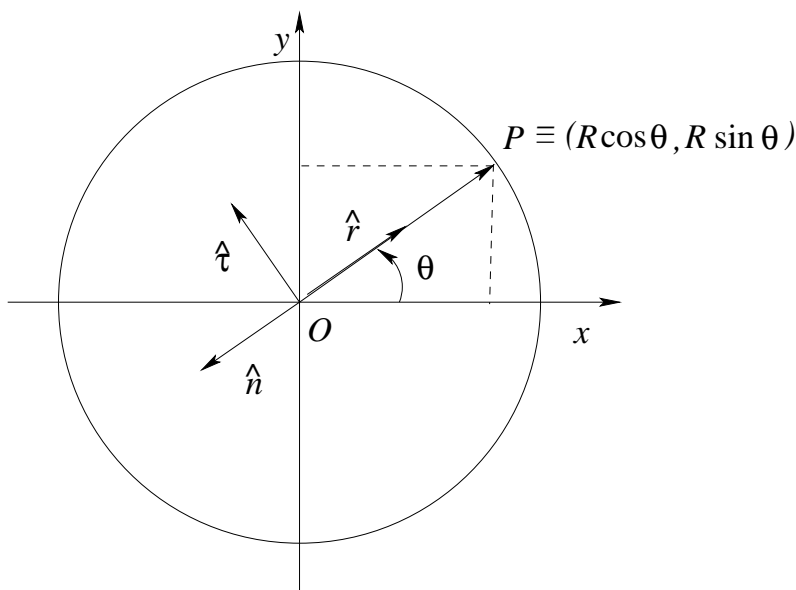


Fig. 3.11 Circunferencia en coordenadas polares

Relación entre el vector velocidad y la velocidad escalar

El vector velocidad es

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OP}}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{OP}}{ds} = \frac{ds}{dt} \hat{\tau}. \quad (35)$$

El vector velocidad es tangente, y su componente en la dirección $\hat{\tau}$ es precisamente la velocidad escalar, su módulo es la rapidez

$$|\vec{v}| = \left| \frac{ds}{dt} \right|.$$

Componentes de la aceleración

La aceleración vectorial es

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \frac{ds}{dt} \hat{\tau} = \frac{d^2s}{dt^2} \hat{\tau} + \frac{ds}{dt} \frac{d\hat{\tau}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \hat{\tau} + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \frac{d\hat{\tau}}{ds} = \frac{d^2s}{dt^2} \hat{\tau} + \frac{v^2}{R} \hat{n}.$$

La aceleración es la suma de dos vectores ortogonales entre sí

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n,$$

la aceleración tangencial

$$\vec{a}_t = \frac{d^2s}{dt^2} \hat{\tau} = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \hat{v} \quad (36)$$

y la normal o centrípeta

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \hat{n}. \quad (37)$$

La aceleración tangencial está relacionada con los cambios de rapidez

$$\vec{a} \cdot \hat{v} = \vec{a}_t \cdot \hat{v} = \frac{d|\vec{v}|}{dt}.$$

En un movimiento uniforme \vec{a}_t es cero. Si el ángulo entre la velocidad y la aceleración es obtuso el movimiento es retardado. Si es agudo es acelerado.

Por su parte la aceleración normal está relacionada con cambios de dirección de la velocidad. En un movimiento rectilíneo $\vec{a}_n = 0$.

Cambios de marco de referencia

El movimiento de un móvil depende del marco de referencia. En esta sección estudiaremos la relación que hay entre los movimientos de un mismo móvil vistos desde dos marcos de referencia diferentes. Uno de ellos R lo consideraremos fijo. Solidario con él habrá un sistema de coordenadas determinado por un origen O y una terna ortonormal $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$. El otro marco R' se moverá con respecto al primero. El marco R' también tendrá su sistema de coordenadas cartesianas con origen O' y terna ortonormal $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$. En general, vistos desde R , tanto el origen O' como la terna $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ son funciones del tiempo. El movimiento de O' se llama la translación y el movimiento de la terna la rotación. Por ahora nos limitaremos a estudiar cambios de marco de referencia sin rotación relativa, (translación pura). Podemos en este caso identificar la terna de versores unitarios de R' con la de R .

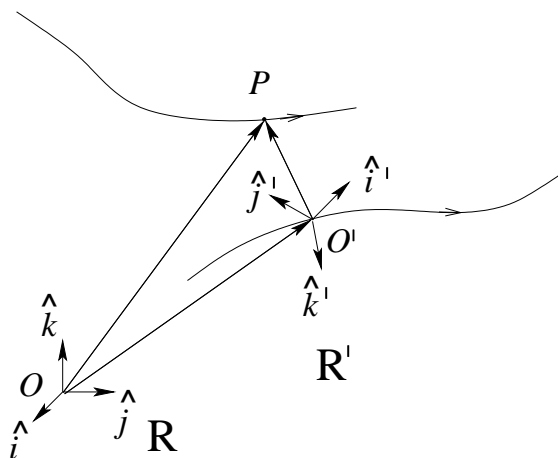


Fig. 3.12 Un móvil visto desde dos marcos de referencia

La posición del móvil P respecto al sistema R es el vector \vec{OP} mientras que respecto al sistema R' es el vector $\vec{O'P}$. Por la definición de suma de vectores

$$\vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'P}.$$

Derivando respecto al tiempo se obtiene la relación entre las velocidades

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}' \quad (38)$$

y derivando una vez más se obtiene la aceleración,

$$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{a}' . \quad (39)$$

Los vectores \vec{v}' y \vec{a}' son respectivamente la velocidad y aceleración relativas al marco R' , mientras que $\vec{v}_{O'}$ y $\vec{a}_{O'}$ son la velocidad y aceleración del punto O' relativas al sistema de referencia R .

Si el movimiento de R' es de translación rectilínea uniforme la aceleración del móvil es igual en ambos marcos de referencia.

Movimiento circular

En un movimiento circular la coordenada curvilínea es proporcional al ángulo θ que forma el rayo que va del centro de la circunferencia al móvil y el radio que corresponde al origen de las coordenadas curvilíneas. Midiendo el ángulo en radianes y siendo R el radio,

$$s = R\theta . \quad (40)$$

El movimiento queda determinado cuando se conozca la función $\theta(t)$. Se definen la velocidad angular ω y la aceleración angular α como

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R}v , \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{R}a . \quad (41)$$

Cuando el movimiento es uniforme ($\alpha = 0$) el tiempo que tarda en dar una vuelta (período) es $T = 2\pi/\omega$.

Para un movimiento en el plano xy centrado en el origen se usan coordenadas polares como se ve en la figura 3.11. Conviene definir el versor radial

$$\hat{r} = \cos(\theta)\hat{i} + \sin(\theta)\hat{j} . \quad (42)$$

El versor transversal $\hat{\theta}$, que tiene la dirección en la que θ crece, es la derivada de \hat{r} respecto al ángulo,

$$\hat{\theta} = \frac{d\hat{r}}{d\theta} = -\sin(\theta)\hat{i} + \cos(\theta)\hat{j} . \quad (43)$$

La derivada de $\hat{\theta}$ es $-\hat{r}$,

$$\frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{r} . \quad (44)$$

El vector posición es

$$\vec{OP} = R\hat{r} ,$$

la velocidad

$$\vec{v} = \omega R\hat{\theta} \quad (45)$$

y la aceleración

$$\vec{a} = \alpha R\hat{\theta} - \omega^2 R\hat{r} . \quad (46)$$

En el caso del movimiento uniforme ($\alpha = 0$), la aceleración es radial, y las proyecciones sobre los ejes tiene movimientos oscilatorios armónicos, con la misma amplitud (R) y la misma frecuencia angular (ω), pero desfasados $\pi/2$.

Un ejemplo 3D: Movimiento helicoidal

Como ejemplo de movimiento en tres dimensiones consideraremos el movimiento helicoidal. Este movimiento está compuesto por un movimiento circular uniforme en el plano xy y una translación con velocidad constante u en el eje z . La trayectoria es una hélice. El paso de la hélice es lo que avanza a lo largo del eje z en una vuelta $2\pi u/\omega$. En un marco de referencia que se mueva con velocidad de translación $u\hat{k}$ el movimiento es circular uniforme.

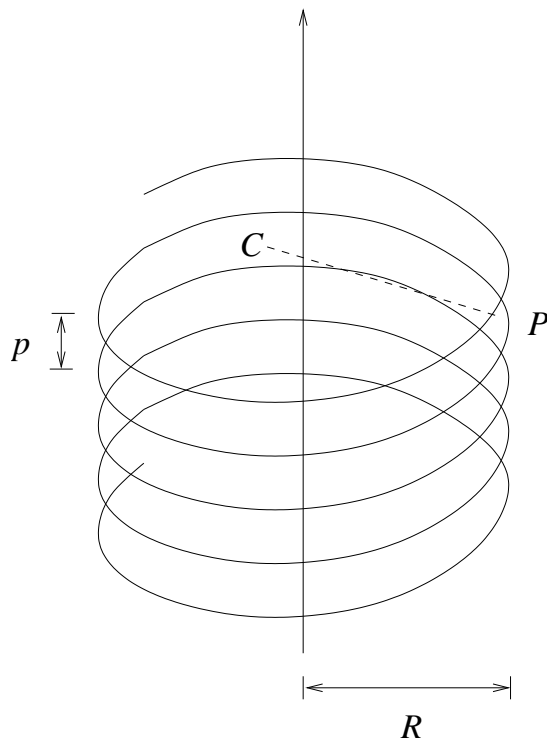


Fig. 3.13 Hélice

Hélice de radio R y paso p . El radio de curvatura es mayor que R , por eso el centro de curvatura C del punto P no se encuentra en el eje.

Si hacemos coincidir el eje de la hélice con el eje z y si la posición inicial es el punto $(R, 0, 0)$ las ecuaciones que describen el movimiento son

$$\vec{OP} = R(\cos(\omega t)\hat{i} + \sin(\omega t)\hat{j}) + ut\hat{k}.$$

La velocidad es

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OP}}{dt} = R\omega(-\sin(\omega t)\hat{i} + \cos(\omega t)\hat{j}) + u\hat{k},$$

y la aceleración

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -R\omega^2(\cos(\omega t)\hat{i} + \sin(\omega t)\hat{j}).$$

La aceleración es la misma que la del movimiento circular uniforme (46).

La rapidez es constante $v = \sqrt{\omega^2 R^2 + u^2}$, pero el versor tangente tiene componente z

$$\hat{v} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 R^2 + u^2}} [R\omega(-\sin(\omega t)\hat{i} + \cos(\omega t)\hat{j}) + u\hat{k}].$$

La aceleración es puramente normal, pero el radio de curvatura R_c es mayor que el radio R ,

$$|\vec{a}| = R\omega^2 = v^2/R_c$$

$$R_c = \frac{v^2}{R\omega^2} = \frac{\omega^2 R^2 + u^2}{R\omega^2} = R \left[1 + \left(\frac{u}{R\omega} \right)^2 \right]. \quad (47)$$

El centro de curvatura no se encuentra en el eje y el plano osculador está inclinado.

Un ejemplo 2D: La cicloide

La cicloide es la curva que recorre un punto del borde de una rueda que rueda sin patinar sobre una superficie plana. Consideremos el caso de la rueda de radio R que se traslada con velocidad constante v_0 . Véase la figura 3.14. La posición del centro de la rueda es

$$\vec{OC} = v_0 t \hat{i} + R \hat{j}.$$

El vector \vec{CP} rota con velocidad angular ω . El ángulo es $\theta = \omega t$. Entonces

$$\vec{CP} = -R \sin(\omega t) \hat{i} - R \cos(\omega t) \hat{j}.$$

El movimiento es entonces

$$\vec{OP} = (v_0 t - R \sin(\omega t)) \hat{i} + R(1 - \cos(\omega t)) \hat{j}.$$

La velocidad es

$$\vec{v} = (v_0 - R\omega \cos(\omega t)) \hat{i} + R\omega \sin(\omega t) \hat{j}.$$

No hemos usado para nada la condición de que la rueda no patine. Esa condición lo que dice es que cuando el punto está en contacto con la superficie ($t = 0$) la velocidad debe anularse, entonces

$$v_0 = R\omega.$$

Nótese que la trayectoria es singular en los puntos en los que el móvil está en contacto con la superficie; hay una cúspide. Sin embargo como la velocidad se anula el movimiento es regular.

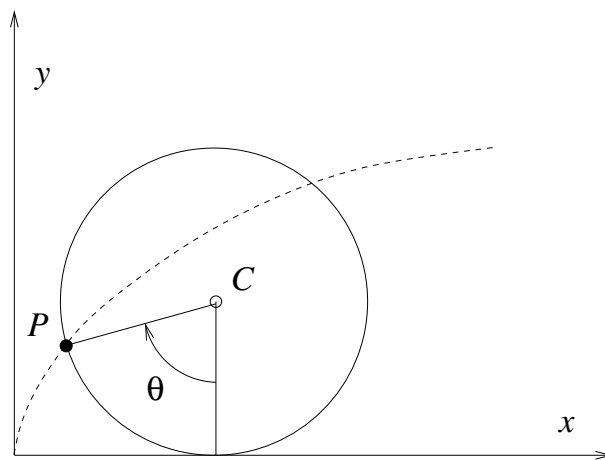


Fig. 3.14 Cicloide

Capítulo 3: Cinemática

También en este caso la aceleración es igual a la del movimiento circular uniforme

$$\vec{a} = R\omega^2(\sin(\omega t)\hat{i} + \cos(\omega t)\hat{j}) .$$

Sin embargo, a diferencia del movimiento circular uniforme, para la cicloide sí hay una componente tangencial de la aceleración. En efecto la rapidez varía de 0 en el punto de contacto con el piso a $2\omega R$ en el tope de la curva.

Calculemos el radio de curvatura en el tope $\omega t = \pi$. En el tope la aceleración es puramente centrípeta, por tanto

$$R_c = \frac{v^2}{|\vec{a}_n|} = \frac{(2R\omega)^2}{R\omega^2} = 4R .$$

Dinámica

El principio de inercia de Galileo Galilei

La Dinámica es la parte de la Mecánica que estudia las causas del movimiento y los movimientos que resultan en determinadas situaciones. Se supone que esas causas sean acciones o fuerzas que los cuerpos ejercen unos sobre otros. El nombre proviene del griego *δύναμις*, fuerza. La Dinámica es la parte de la Física más antigua, en particular la Estática, que es el estudio de los cuerpos en equilibrio, es más o menos la misma que la de la antigüedad.

El primer principio o ley de la dinámica es el Principio de Inercia debido a Galileo Galilei (Pisa 1564 – Florencia 1642). Galileo fue el primer físico de la época moderna y uno de los creadores de la ciencia experimental. Su principio de inercia es totalmente contrario a la creencia tradicional. En nuestra experiencia diaria los cuerpos tienden a pararse. Por eso parece natural la conclusión a la que llegó Aristóteles (384–322 a.C.) en su tratado sobre Física, de que el “estado natural” de todos los cuerpos es el reposo y que un cuerpo cualquiera en movimiento disminuye su velocidad hasta pararse a menos que algo lo empuje para que siga moviéndose. Debieron pasar unos 2000 años para que Galileo se diera cuenta de que el “estado natural” de los cuerpos no era el reposo. Galileo hizo multitud de observaciones y estudios del movimiento de cuerpos en planos inclinados y superficies horizontales, y se dio cuenta de que lo que frenaba el movimiento de los cuerpos eran las fuerzas de roce de las superficies y del aire. En el *Diálogo sobre los dos máximos sistemas del mundo* (1632) escribe que en ausencia de cualquier impedimento externo o accidental un móvil que se deslice sobre una superficie horizontal se movería con movimiento rectilíneo uniforme hasta el borde de la superficie, y que si tal espacio fuese sin término el movimiento sería perpetuo. Dice también que para que esto sea cierto el móvil debe ser inmune a cualquier resistencia, lo cual es quizás imposible de encontrar en la materia, por lo que no sería de extrañar que este resultado sea contrario a la experiencia.

El polifacético físico y matemático inglés Isaac Newton (1643–1727) publicó en 1687 uno de los libros más influyentes de la historia, *Principios matemáticos de la Filosofía Natural*. En esta obra Newton expuso sus tres leyes (o axiomas) que constituyen la teoría de la Dinámica que estuvo vigente por más de 200 años. La primera ley es una generalización del principio de Galileo. Aparecen también la teoría de la Gravitación Universal, la demostración de las leyes de Kepler del movimiento planetario y como un apéndice el cálculo diferencial con el nombre de teoría de las fluxiones.

Sistemas de referencia inerciales y 1ª ley de Newton

En el principio de inercia de Galileo está implícito que el sistema de referencia es la Tierra. Vamos a tratar de extender este principio a otros sistemas de referencia.

En la época de Galileo no estaba para nada claro el concepto de sistema de referencia y la relatividad del espacio. Desde siempre se había considerado la Tierra en reposo y el espacio era el espacio solidario con ella. Los dos máximos sistemas a los que se refiere en su *Dialogo* son los dos modelos que estaban en boga para la astronomía, el geocéntrico con la Tierra en reposo en el centro del Universo, y el heliocéntrico con el Sol en el centro del sistema solar. La astronomía antigua, cuyo último gran exponente fue el egipcio de época romana Claudio Tolomeo (90–170 d.C.), usaba el sistema geocéntrico. El sistema heliocéntrico fue propuesto un siglo antes de Galileo por el cura polaco Nicolás Copérnico (1473–1543). En la época de Galileo había un gran debate sobre cual era el sistema correcto. La Iglesia Católica condenó el sistema heliocéntrico como contrario a la Biblia. A Galileo se le siguió un juicio por apoyarlo y fue obligado a retractarse. Lo más paradójico del asunto, visto desde la perspectiva de hoy en día, es que con respecto a la cinemática ambos sistemas *son equivalentes*, son simplemente sistemas de referencia diferentes. El sistema heliocéntrico puede ser más conveniente que el geocéntrico, pero seguramente no es más *verdadero*.

El juicio a Galileo y la condena unos años antes del filósofo Giordano Bruno a morir en la hoguera, por sostener, entre otras cosas, que las estrellas eran como soles y que seguramente tendrían planetas como la Tierra, tuvieron un efecto trascendental en la historia: la ciencia huyó de los países católicos hacia regiones menos hostiles.

Lo primero que hay que decir sobre el principio de inercia es que se refiere a cuerpos sobre los que no actúan fuerzas externas. A estos cuerpos los llamaremos **libres**. Lo segundo es que el principio no puede valer para cualquier sistema de referencia. Un movimiento rectilíneo uniforme en un sistema de referencia se puede ver como una cosa muy distinta en otro sistema. Vamos entonces a definir como inerciales los sistemas de referencia en los que vale el principio de inercia.

Definición. *Se denominan inerciales los sistemas de referencia en los que los cuerpos libres se mueven con movimiento rectilíneo uniforme.*

Habiendo hecho esta definición podemos demostrar el siguiente teorema

Teorema. *Dado un sistema de referencia inercial R , condición necesaria y suficiente para que otro sistema de referencia R' sea también inercial es que se mueva con movimiento de translación rectilíneo uniforme con respecto al primero.*

Demostración. Si un sistema de referencia R' rota respecto de R las trayectorias rectas en R son curvas en R' . Por lo tanto el movimiento de R' respecto a R debe ser de translación. Las aceleraciones de un móvil en ambos sistemas están relacionadas por la ecuación (39),

$$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{a}' .$$

Si la aceleración de la translación $\vec{a}_{O'}$ es cero todos los móviles tienen la misma aceleración en ambos sistemas. Por otra parte si un mismo móvil se mueve con aceleración cero en ambos sistemas debe necesariamente ser $\vec{a}_{O'} = 0$.

Naturalmente una definición no dice nada sobre la naturaleza, simplemente especifica un término. Entonces ¿Cuál sería la ley de la inercia? Simplemente la hipótesis de que los sistemas de referencia inerciales existan.

1ª ley de Newton. *Existen sistemas de referencia inerciales.*

Supongamos que existan los sistemas de referencia inerciales (SRI), el problema entonces es: ¿Cuales son?

La Tierra es un buen SRI para fenómenos terrestres que duren pocos segundos y no tengan una gran extensión espacial, como por ejemplo los experimentos de Galileo. Pero si los fenómenos duran varias horas, la situación es diferente. Lo primero que nos damos cuenta es que los cuerpos celeste dan vueltas alrededor de la Tierra. La gran mayoría con la misma velocidad angular constante, son las llamadas estrellas fijas. Algunos pocos, el Sol, la Luna, los planetas, los cometas, en general los cuerpos del sistema solar, tienen movimientos adicionales al de las estrellas fijas. Si suponemos que la Tierra sea un SRI tendríamos que explicar cuál es la acción que ejerce la Tierra sobre las estrellas fijas que las obliga a rotar en torno a ella con movimiento circular uniforme. La acción debería crecer con el radio r (distancia Tierra-estrella), dado que la aceleración centrípeta es $\omega^2 r$. Habría que explicar además porqué el eje de rotación es el mismo para todas las estrellas fijas y como es posible que tales estrellas tengan velocidades tan inmensas como las que resultan del producto ωr .

Si en cambio suponemos que sea la Tierra la que rota respecto a un SRI, una vuelta cada día sideral, alrededor del eje Norte-Sur y en sentido Oeste-Este, las estrellas fijas se verían realmente como si estuvieran en direcciones fijas. En realidad cada estrella podrá tener su propio movimiento, rectilíneo o no, con una velocidad transversal v_t . La velocidad angular de la estrella vista desde la desde la Tierra será (41):

$$\omega = \frac{v_t}{r} .$$

Las distancias de la Tierra a la mayoría de las estrellas es tan grande que la velocidad angular que resulta es imperceptible, aún suponiendo la máxima velocidad posible $v_t = c$.

Podemos verificar la rotación de la tierra con respecto a un SRI con el péndulo de Foucault, un péndulo pesado y largo que pueda oscilar durante horas sin pararse. Las leyes de la mecánica en un SRI determinan que el péndulo oscila en un plano. Si ponemos el péndulo en uno de los polos se observa que el plano del péndulo se mantiene inmóvil respecto a las estrellas fijas, o sea que rota una vuelta por día sideral en el sentido Este-Oeste.

En conclusión, los sistemas de referencia inerciales no rotan respecto a las estrellas fijas.

Un sistema de referencia con origen en el centro de la Tierra y que no rote respecto a las estrellas fijas permite estudiar fenómenos terrestres que duren días, incluyendo satélites artificiales etc. Desde el punto de vista de la cinemática ambos sistemas son equivalentes, desde el punto de la dinámica no lo son.

Si queremos estudiar el movimiento de la Luna ese marco de referencia no es adecuado. Deberíamos usar uno con origen en el centro de masas del sistema Tierra-Luna.

Si nuestro objetivo es estudiar el movimiento de los cuerpos del sistema solar ese tampoco es un buen SRI. Uno adecuado es el centrado en el centro de masas del sistema solar, punto que es bastante cercano al centro del Sol. Con este marco de referencia podemos estudiar fenómenos que duren miles de años.

La mayor parte de las estrellas que vemos forman parte de nuestra galaxia, la Vía Láctea. A una escala de millones de años esas estrellas no aparecen en absoluto como *fijas*. Tendremos que usar galaxias lejanas para definir la dirección de los ejes.

Si nuestro objetivo es por ejemplo estudiar el movimiento de las estrellas en la Galaxia un sistema de referencia con origen en el centro de la Galaxia sería el adecuado. Con ese sistema podemos estudiar fenómenos que duren centenares de millones de años.

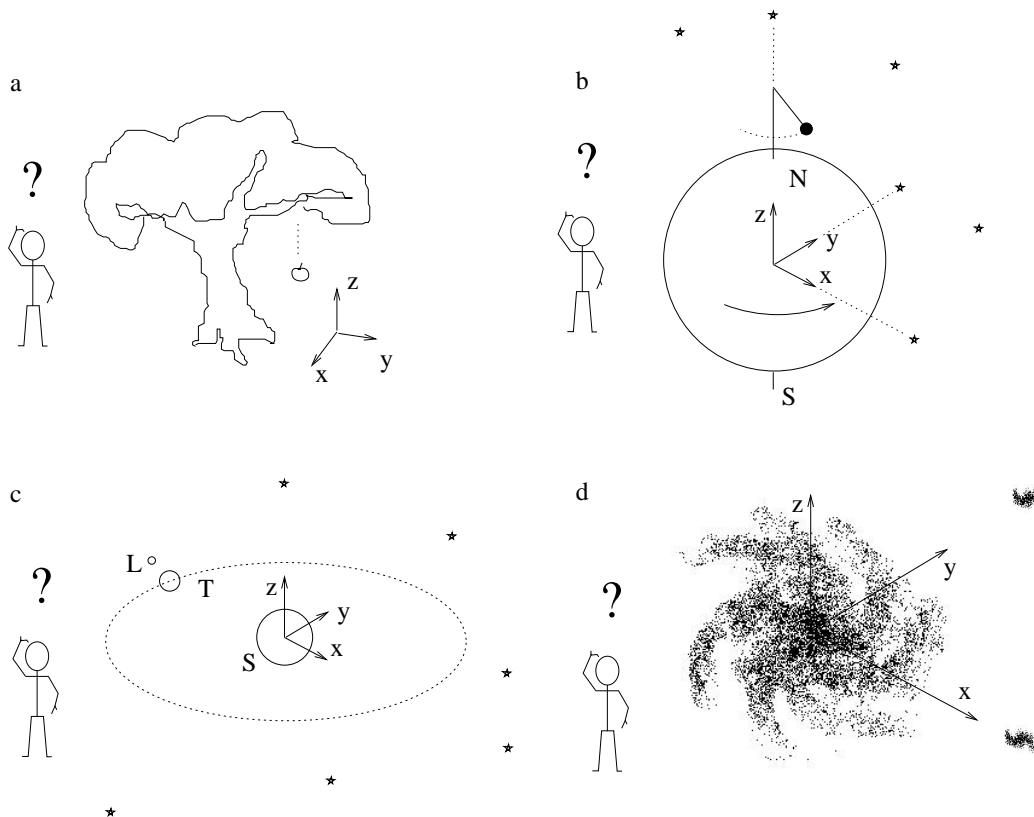


Fig. 4.1 Marcos inerciales

Lo adecuado que sea un sistema de referencia como inercial depende del fenómeno que estemos estudiando. a) Para estudiar una fruta que cae durante unos pocos segundos basta un sistema solidario con el suelo. b) Para tratar un péndulo de Foucault que dura varias horas oscilando, la rotación de la tierra es relevante. Se puede usar un sistema con origen en el centro de la Tierra y ejes dirigidos hacia estrellas fijas. c) Para estudiar el movimiento de los planetas, durante meses o años usamos un sistema centrado en el Sol. d) Para estudiar el movimiento de las estrellas en la Galaxia, durante centenares de millones de años podemos usar un sistema centrado en el centro de la Galaxia y con ejes dirigidos hacia galaxias lejanas.

Fuerza, peso, dinamómetro

Las fuerzas son las acciones que los cuerpos ejercen unos sobre otros y que causan las aceleraciones. La fuerza como magnitud física era ya usada en la antigüedad. Si un cuerpo es libre, o sea si sobre él no hay fuerzas, sabemos por el principio de inercia, que está en reposo o tiene aceleración cero. Pero la aserción recíproca es falsa. Sobre un cuerpo con aceleración cero pudieran estar actuando varias fuerzas cuyos efectos se anulen. Diremos en ese caso que la fuerza neta es cero.

La primera fuerza que todos experimentamos es el peso. Todos los cuerpos son atraídos hacia el centro de la Tierra. Para evitar que algo caiga hay que sostenerlo con alguna otra fuerza, por ejemplo colgándolo con una cuerda. Podemos usar el hecho de que la fuerza neta sobre un cuerpo en reposo debe ser cero para comparar fuerzas. Por ejemplo si en dos situaciones diferentes un mismo cuerpo se mantiene en reposo sin caer podemos decir que las fuerzas que ambos casos anulan el efecto del peso deben ser iguales.

Además de aceleraciones, las fuerzas que actúan sobre los cuerpos también producen *deformaciones*. Típicamente si las fuerzas no son muy grandes las deformaciones que producen son *reversibles*, es decir el cuerpo recupera su forma original al desaparecer la fuerza. En este caso decimos que la deformación es *elástica*. Podemos usar las deformaciones elásticas para medir la fuerzas. Por ejemplo podemos calibrar las elongaciones de un resorte en unidades de fuerza. Un aparato para medir fuerzas, como por ejemplo el que acabamos de describir, se llama **dinamómetro**.

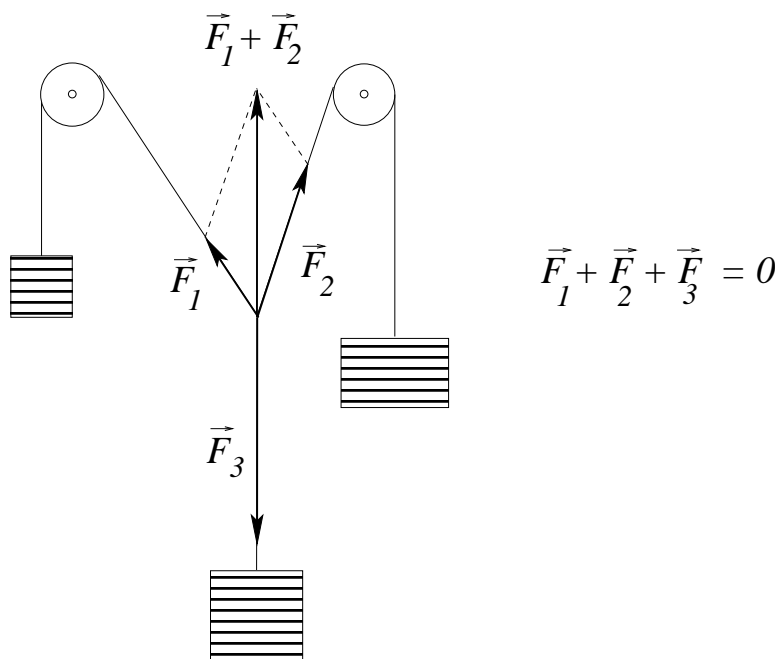


Fig. 4.2 Suma de fuerzas

En equilibrio las fuerzas que ejercen las tres cuerdas en el punto en que se unen se anulan vectorialmente.

Si halamos un cuerpo con una cuerda notamos que el efecto depende de la dirección de la cuerda. Es decir las fuerzas tienen dirección. Si aplicamos dos fuerzas paralelas a un cuerpo el efecto es el mismo que la aplicación de una sola fuerza cuya magnitud sea la suma de las magnitudes de las fuerzas. Si aplicamos fuerzas con direcciones diferentes constatamos que las fuerzas se suman como *vectores*. Es decir la fuerza es una magnitud física vectorial.

Masa inercial y 2ª ley de Newton

Según la primera ley de Newton en un sistema de referencia inercial los cuerpos sobre los que no actúan fuerzas se mueven sin aceleración. Por lo tanto las causas de las aceleraciones son las fuerzas. La segunda ley de Newton nos dice que relación hay entre la fuerza que actúa sobre un cuerpo y la aceleración que adquiere. Supongamos que estamos en el espacio interplanetario, lejos de los planetas. La atracción gravitatoria de los planetas será insignificante y la del Sol tardará días en notarse. Podemos hacer experimentos aplicando fuerzas conocidas sobre diferentes cuerpos y midiendo las aceleraciones que adquieren.

El resultado de los experimentos puede resumirse en la segunda ley.

2ª ley de Newton. *Un cuerpo puntual sobre el que actúa una fuerza \vec{F} adquiere una aceleración \vec{a} con el mismo sentido y la misma dirección que la fuerza y una magnitud proporcional a la magnitud de la fuerza,*

$$\vec{a} \propto \vec{F} .$$

La constante de proporcionalidad es una magnitud escalar positiva característica del cuerpo, cuyo inverso m se denomina **masa inercial**, o simplemente masa del cuerpo.

$$m\vec{a} = \vec{F} . \quad (48)$$

En la dinámica de la partícula aparecen, en relación con la cinemática, dos nuevas magnitudes físicas: la fuerza y la masa. Se escogió a la masa con magnitud fundamental. La unidad internacional de masa es el kilogramo (kg) y la unidad de fuerza es el newton ($1\text{N} = 1\text{kg m s}^{-2}$).

La masa mide la inercia de un cuerpo, o sea su resistencia a cambiar su estado de movimiento, mayor es la masa menor es la aceleración que adquiere por efecto de una fuerza.

La aditividad de las fuerzas implica la aditividad de las masas. Consideremos dos cuerpos uno de masa m_1 sobre el que actúa una fuerza \vec{F}_1 y el otro de masa m_2 sobre el que actúa una fuerza \vec{F}_2 . Supongamos que no hay fuerzas entre ellos y que ambos se mueven con la misma aceleración \vec{a} y con una velocidad relativa nula del uno respecto al otro. Podríamos considerar que ambos cuerpos son dos partes de un mismo cuerpo compuesto.

$$m_1\vec{a} = \vec{F}_1 \quad \text{y} \quad m_2\vec{a} = \vec{F}_2 \implies (m_1 + m_2)\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 .$$

La fuerza total que actúa sobre el cuerpo compuesto será $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ y por consiguiente la masa del cuerpo compuesto debe ser $m = m_1 + m_2$. Si un cuerpo es homogéneo su masa inercial es proporcional a la cantidad de materia.

Relatividad de Galileo

Las aceleraciones de los cuerpos son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales. Como los movimientos están determinados por la segunda ley de Newton que depende de la aceleración, todos los SRI son *equivalentes mecánicamente*. Esto fue descubierto por Galileo, quien en el *Dialogo* escribe que si un barco navega con velocidad constante en un lago de aguas tranquilas sería imposible, haciendo observaciones dentro del barco, descubrir si el barco se mueve o a qué velocidad se mueve.

Fuerzas aparentes

En ocasiones puede ser conveniente usar sistemas de referencia que no sean inerciales. En ese caso la 2ª ley de Newton no es válida. Si llamamos \vec{a}' la aceleración de una partícula respecto al sistema de referencia acelerado R' y \vec{a} la aceleración respecto a un SRI R en general tendremos

$$\vec{a} = \vec{a}_{R'} + \vec{a}' \quad (49)$$

donde la aceleración $\vec{a}_{R'}$ depende del movimiento del sistema acelerado. Si este último tiene un movimiento de pura translación entonces $\vec{a}_{R'} = \vec{a}_{O'}$, pero si el sistema tiene rotación la expresión es más complicada. La ecuación de movimiento de la partícula en el sistema acelerado toma la forma de la 2ª ley de Newton si definimos la **fuerza aparente** como

$$\vec{F}_a = -m\vec{a}_{R'} \quad (50)$$

y las sumamos a la fuerza verdadera $\vec{F} = m\vec{a}$,

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_a .$$

Acción y reacción. 3ª ley de Newton

Muchas fuerzas se presentan como interacciones entre cuerpos. La tercera ley de Newton establece ciertas condiciones sobre las fuerzas de interacción.

3ª ley de Newton. Si dos cuerpos puntuales A y B interactúan la fuerza \vec{F}_{BA} que A produce sobre B y la fuerza \vec{F}_{AB} que B produce sobre A cumplen las siguientes dos condiciones

- son vectores opuestos $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$ (o sea tienen la misma dirección, la misma magnitud y sentido opuesto),
- son paralelas a la línea recta que une A con B (línea de acción).

Es costumbre referirse a una de las fuerzas como *acción* y a la otra como *reacción*. Es de hacer notar que la acción y la reacción están aplicadas en cuerpos diferentes.

Por ejemplo si una pelota rebota sobre una pared la fuerza que la pelota ejerce sobre la pared es opuesta a la fuerza que la pared hace sobre la pelota. La fuerza con la que la Tierra atrae a la Luna es opuesta a la fuerza con la que la Luna atrae a la Tierra. Si guindamos un cuerpo con una cuerda, la fuerza con la que la cuerda hala al cuerpo es opuesta a la fuerza que el cuerpo hace sobre la cuerda. La fuerza de fricción que el aire hace sobre un paracaídas es opuesta a la fuerza que el paracaídas hace sobre la masa de aire.

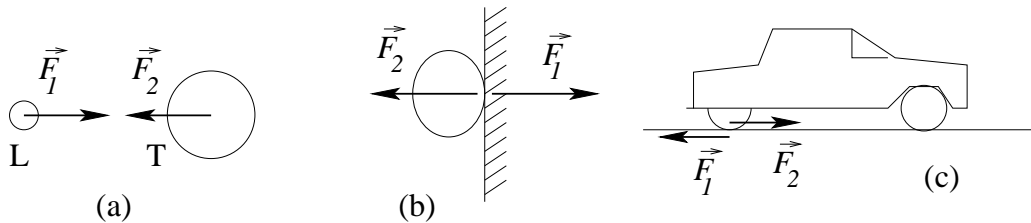


Fig. 4.3 Pares acción-reacción

(a) \vec{F}_1 es la fuerza con la que la Tierra atrae a la Luna, \vec{F}_2 aquella con la que la Luna atrae a la Tierra. (b) En una pelota que rebota en una pared, \vec{F}_1 es la fuerza que hace la pelota sobre la pared y \vec{F}_2 la que la pared hace sobre la pelota. (c) En un automóvil \vec{F}_1 es la fuerza de fricción que la rueda hace sobre el pavimento y \vec{F}_2 es la que el pavimento hace sobre la rueda. Esta última es la fuerza que impulsa el automóvil.

Cantidad de movimiento e impulso

Se denomina **cantidad de movimiento**, **ímpetu** o **momentum lineal** de una partícula al producto de su masa por su velocidad,

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (51)$$

Esta definición es debida a Newton.

Si \vec{F} es la fuerza neta que actúa sobre la partícula, la segunda ley de Newton se escribe

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \quad (52)$$

Si integramos la ecuación de movimiento entre dos instantes t_1 y t_2 obtenemos

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \vec{I}. \quad (53)$$

La integral de la fuerza respecto al tiempo recibe el nombre de **impulso**. El incremento del ímpetu es igual al impulso de la fuerza neta.

El concepto de impulso es particularmente útil en el caso de las fuerzas impulsivas, que son fuerzas de muy corta duración, pero muy intensas, de manera que el impulso es significativo. Son las fuerzas típicas de un choque. Podemos tener una partícula que esté sometida a una fuerza no impulsiva \vec{F} y a una impulsiva \vec{F}_i . El impulso de la fuerza no impulsiva durante el lapso de duración de \vec{F}_i será insignificante. El incremento de la cantidad de movimiento durante el choque será esencialmente el impulso de la fuerza impulsiva. Típicamente el desplazamiento durante el choque también es nulo.

Centro de masas de un sistema

La mayor utilidad de la cantidad de movimiento es para tratar sistemas de partículas. Un cuerpo cualquiera puede ser modelado como un conjunto de partículas. La partícula k -ésima tendrá una posición \vec{r}_k , una masa m_k , y una cantidad de movimiento $\vec{p}_k = m_k\vec{v}_k$. La masa total del sistema será $M = \sum_k m_k$.

El **centro de masas**, **baricentro** o **centro de gravedad** es el punto geométrico G cuya vector posición es el promedio, ponderado con la masa, de las posiciones de las partículas

$$\vec{OG} = \frac{1}{M} \sum_k m_k \vec{r}_k. \quad (54)$$

La velocidad del centro de masas es

$$\vec{v}_G = \frac{d\vec{OG}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_k m_k \vec{v}_k = \frac{1}{M} \sum_k \vec{p}_k.$$

Llamando \vec{P} a la cantidad de movimiento total del sistema tenemos

$$\vec{P} = M\vec{v}_G. \quad (55)$$

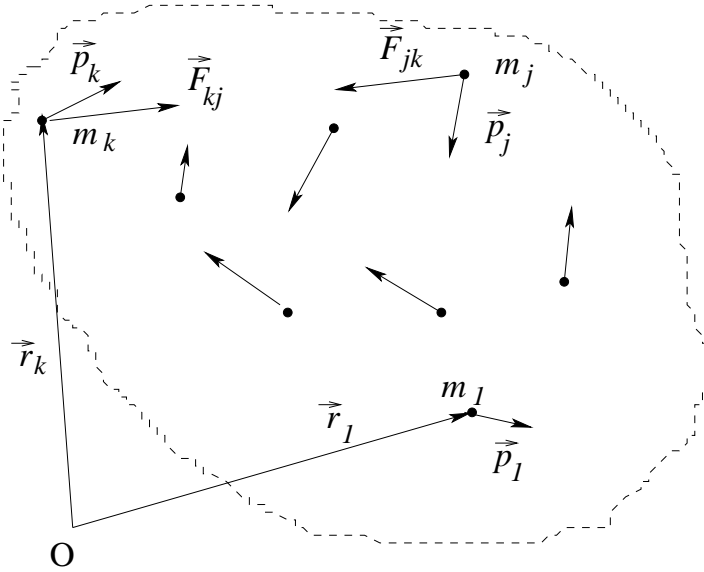


Fig. 4.4 Sistema de partículas

Fuerzas internas

Consideremos ahora las fuerzas que actúan sobre el sistema. La fuerza total que actúa sobre la partícula k -ésima tendrá una componente externa y una interna formada por la suma de las fuerzas que ejercen sobre ella las otras partículas del sistema.

$$\vec{F}_k = \vec{F}_k^{(e)} + \sum_j \vec{F}_{kj}.$$

La fuerza neta que actúa sobre todo el sistema será la suma de las fuerzas sobre cada partícula \vec{F}_k ,

$$\vec{F}_{\text{total}} = \sum_k \vec{F}_k^{(e)} + \sum_{kj} \vec{F}_{kj}.$$

Ahora bien, la ley de acción y reacción dice que la fuerza que la partícula j ejerce sobre la partícula k es opuesta a la fuerza que k ejerce sobre j , $\vec{F}_{kj} = -\vec{F}_{jk}$, y por consiguiente la suma de las fuerzas internas es nula.

$$\vec{F}_{\text{total}} = \sum_k \vec{F}_k^{(e)} = \vec{F}_{\text{total}}^{(e)}. \quad (56)$$

Este resultado es el que permite tratar un cuerpo compuesto como una partícula, sin ocuparnos de las fuerzas que una parte del cuerpo hace sobre las otras.

Dinámica de un sistema. Conservación de la cantidad de movimiento

Para la partícula k -ésima de un sistema vale (52)

$$\frac{d\vec{p}_k}{dt} = \vec{F}_k ,$$

Sumando sobre todas las partículas del sistema

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_G = \vec{F}_{\text{total}}^{(e)} . \quad (57)$$

Si la fuerza externa neta sobre un sistema es nula en una dirección \hat{u} , $\vec{F}_{\text{total}}^{(e)} \cdot \hat{u} = 0$ durante cierto lapso la correspondiente componente de la cantidad de movimiento total se conserva durante el mismo lapso

$$\vec{P} \cdot \hat{u} = \text{constante} . \quad (58)$$

En particular si sobre un sistema no actúan fuerzas externas su centro de masas se moverá con movimiento rectilíneo uniforme.

Validez de las leyes de Newton

La mecánica Newtoniana o Clásica deja de ser válida en dos límites, para cuerpos muy pequeños (efectos cuánticos) y para cuerpos muy rápidos, $v \sim c$ (efectos relativistas). Nos limitaremos a considerar este último caso.

En la Relatividad Especial (1905) de Albert Einstein (Alemania 1879, EEUU 1955) la primera ley de Newton sigue siendo válida, excepto en dos aspectos. Primero, la velocidad relativa entre los sistemas de referencia inerciales debe ser menor que la velocidad de la luz. Segundo, la simultaneidad es relativa; eventos que son simultáneos en un sistema de referencia no lo son en otro. Esto hace que el tiempo sea diferente en dos sistemas de referencia diferentes. Por consiguiente también son diferentes las fórmulas del movimiento relativo. En vez de las llamadas transformaciones de Galileo se usan las transformaciones de Lorentz.

La segunda ley de Newton es válida en relatividad solamente si la velocidad es nula. Sin embargo es una buena aproximación para $v \ll c$.

Dado que, según la Relatividad Especial, las acciones instantáneas a distancia no pueden existir la ley acción y reacción entre partículas distantes no puede ser exacta. Por ejemplo las fuerzas entre dos cargas eléctricas en reposo separadas una distancia r cumplen con la tercera ley, pero si una de las cargas se mueve la otra se enterará un tiempo r/c después. Entre cargas en movimiento, además de la fuerza electrostática, existen fuerzas magnéticas, que violan totalmente la tercera ley. La imposibilidad de las acciones a distancia indica que alrededor de las cargas eléctricas debe existir algún ente físico que transporta la fuerza. Ese ente es el campo electromagnético, que tiene cantidad de movimiento. Cuando no haya fuerzas externas la cantidad de movimiento total de las partículas y del campo electromagnético se conserva. En ese sentido la tercera ley sigue siendo válida.

Las fuerzas magnéticas dependen de la velocidad, y por lo tanto, aparentemente violan también la relatividad, o sea no serían iguales en diferentes marcos de referencia inerciales. Fue precisamente ese problema el que llevó a Einstein a desarrollar la teoría de Relatividad Especial. Impuso que la relatividad fuera válida para el electromagnetismo, pero a costa de introducir el tiempo relativo y cambiar la segunda ley de Newton.

Fuerza de gravedad

El peso total de un cuerpo es la suma de los pesos de sus partes. Si el cuerpo es homogéneo el peso es proporcional a la cantidad de materia del cuerpo. Podemos usar el peso de un cuerpo patrón para definir la **masa gravitatoria** del cuerpo. Si m_p es la masa del patrón y \vec{W}_p su peso, el peso \vec{W} de un cuerpo de masa gravitatoria m_g será

$$\vec{W} = m_g \frac{\vec{W}_p}{m_p} = m_g \vec{g}. \quad (59)$$

El vector \vec{g} es el campo gravitacional.

Consideremos un cuerpo de masa inercial m en el que las fuerzas de fricción con el aire sean despreciables y que caiga por la acción de su propio peso \vec{W} . El cuerpo adquiere una aceleración

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \vec{W} = \frac{m_g}{m} \vec{g}.$$

Para un cuerpo homogéneo ambas masas, inercial y gravitacional, son proporcionales a la cantidad de materia, por lo que la razón m_g/m pudiera depender únicamente del tipo de material.

En realidad se demuestra experimentalmente que, en ausencia de roce, *todos* los cuerpos que caen por acción de su peso lo hacen con la *misma aceleración*, independientemente del material del que estén hechos. El primero en hacer este descubrimiento fue Galileo. Lo que esto quiere decir es que en realidad la masa inercial y la masa gravitatoria *son esencialmente la misma magnitud física*.

Si usamos el patrón de masa inercial para definir el campo gravitacional este será igual a la aceleración con la que caen los cuerpos (aceleración de gravedad). Esta cantidad varía ligeramente de punto a punto en la superficie terrestre dependiendo de la latitud y de la distribución local de las masas. El valor promedio es aproximadamente $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$.

Gravitación universal

Newton conocía las leyes descubiertas por el astrónomo alemán Johannes Kepler (1571–1630) sobre el movimiento de los planetas. En particular la primera (1609) que establecía que los planetas se movían en órbitas elípticas con el Sol en uno de los focos, y la tercera (1618) que relacionaba el período T de revolución del planeta alrededor del Sol con el promedio r de las distancias mínima (perihelio) y máxima (afelio) entre el planeta y el Sol,

$$T^2 = Kr^3. \quad (60)$$

La constante K es la misma para todos los planetas.

Newton estaba convencido de que las leyes de la mecánica válidas en la Tierra tenían que ser válidas también para los cuerpos celestes.

Lo primero que se observa es que el volumen del Sol es muchísimo más grande que el volumen de los planetas. Se puede suponer que también la masa del Sol sea mucho más grande que la de los planetas. Por lo tanto el centro de masas del sistema solar debe ser cercano al centro del Sol, que podemos tomar como fijo.

Si los planetas giran alrededor del Sol debe ser porque hay alguna fuerza de atracción entre el Sol y los planetas. La ecuación que determina los movimientos es la segunda ley de Newton, en donde aparece la masa del cuerpo. Como el movimiento de los planetas no depende del planeta, ni por lo tanto de su masa, como establece la tercera ley de Kepler, se deduce que la fuerza de atracción debe ser proporcional a la masa del planeta.

En esto la fuerza de atracción entre los planetas y el Sol se parece al peso de los cuerpos en la superficie de la Tierra. Newton supuso que la fuerza que hacía girar los planetas alrededor del Sol era la misma que hacía caer los cuerpos en la superficie de la Tierra y la que hacía girar la Luna alrededor de la Tierra. Más precisamente Newton postuló la ley de Gravitación Universal, un cuerpo cualquiera del universo es atraído por cualquier otro cuerpo con una fuerza proporcional a su masa. Por la ley de acción y reacción se deduce que la fuerza debe ser proporcional también a la masa del cuerpo atractor y que debe ser paralela a la recta que une los dos puntos.

Si \vec{r} es el rayo vector que va del Sol a un planeta de masa m la fuerza que actúa sobre el planeta será

$$\vec{F} = -mM_S f(r)\hat{r}$$

donde M_S es la masa del Sol y $f(r)$ es una función de la distancia planeta-Sol, por ahora desconocida.

Si suponemos que la única fuerza que actúa sobre el planeta es la atracción producida por el Sol la aceleración será

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F} = -M_S f(r)\hat{r}.$$

Supongamos que planeta se mueva en una órbita circular, la aceleración será la aceleración centrípeta (37),

$$\frac{v^2}{r} = M_S f(r).$$

La velocidad del planeta es la longitud de la órbita entre el período de revolución del planeta $v = 2\pi r/T$. Despejando T^2 obtenemos

$$T^2 = \frac{(2\pi r)^2}{rM_S f(r)}.$$

Comparando este resultado con la tercera ley de Kepler (60) se obtiene la forma de $f(r)$.

$$f(r) = \frac{(2\pi)^2}{KM_S r^2} = \frac{G}{r^2}.$$

La ley de Gravitación Universal entre dos cuerpos de masas m y M será entonces

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{r}, \quad (61)$$

y la constante de la tercera ley de Kepler depende solamente de la constante G de Gravitación Universal y de la masa del Sol.

$$K = \frac{(2\pi)^2}{GM_S}. \quad (62)$$

La ley de Gravitación universal explica el movimiento de los otros cuerpos del sistema solar, satélites, cometas, asteroides etc. Por ejemplo los satélites de Júpiter, varios de los cuales fueron descubiertos por Galileo, se mueven alrededor a Júpiter cumpliendo con leyes análogas a las tres leyes de Kepler, substituyendo al Sol por Júpiter. De la razón entre las constantes de Kepler de los planetas y la de los satélites de Júpiter se puede obtener la razón entre las masas del sol y de Júpiter, $K_J/K_S = M_S/M_J \approx 1000$. Este fue uno de los primeros cálculos de *astrofísica*.

Distribución esférica de masas

El radio del Sol no es una cantidad despreciable cuando se le compara con los radios de las órbitas de los planetas. Sin embargo en las demostraciones que hizo Newton de las leyes de Kepler se usa la fórmula de atracción gravitacional entre partículas puntuales, cuando en realidad la fuerza con la que el Sol atrae a un planeta es la suma de las fuerzas con la que lo atraen las diferentes partes del Sol. Si esa fuerza neta no fuese la que se obtiene con la fórmula de las partículas puntuales las leyes de Kepler no serían válidas. Newton mismo demostró que efectivamente *la fuerza de gravitación producida por un cuerpo esférico es igual a la fuerza producida por un cuerpo puntual de la misma masa colocado en su centro.*

Esa propiedad es exclusiva de las fuerzas que decaen como r^{-2} . Su demostración se hace fácilmente con las técnicas que se usan para estudiar la electrostática, por lo que la dejaremos para el curso de electromagnetismo.

El peso de un cuerpo en la superficie de la Tierra será igual a la fuerza producida por un cuerpo puntual con la masa de la Tierra M_T colocada a una distancia igual al radio terrestre R

$$mg = \frac{GmM_T}{R^2}, \quad g = \frac{GM_T}{R^2}. \quad (63)$$

Podemos usar esta última relación para estimar el valor de la constante de la Gravitación Universal G . La masa de la Tierra es igual a la densidad media d por el volumen $4\pi/3R^3$. El radio de la Tierra es $R = 6,3 \times 10^6$ m. Los materiales que forman la tierra tienen densidades entre 1 y 20 g/cm³. Eso da un valor de G comprendido entre 2×10^{-11} y 4×10^{-10} N m² kg⁻². El valor medido es $6,673 \times 10^{-11}$ N m² kg⁻², que corresponde a una densidad de 5,52 g/cm³.

Experimentos de Cavendish y Eötvös

En 1798 el químico y físico inglés Henry Cavendish (1731–1810) comprobó experimentalmente la ley de gravitación de Newton y midió por primera vez la constante G . Para medir fuerzas tan pequeñas Cavendish usó un péndulo o balanza de torsión. Un par de masas m_1 y m_2 están suspendidas de un hilo H y oscilan movidas por la fuerza producida por la torcedura del hilo. Del período de la oscilación se deduce la constante elástica del hilo. Debido a la atracción gravitatoria entre las masas oscilantes m_1 y m_2 y las masas fijas M_1 y M_2 al cambiar la posición de estas últimas se produce un corrimiento de la posición de equilibrio de la oscilación, corrimiento que puede ser medido. En realidad lo que Cavendish reportó no fue la constante G sino la densidad de la Tierra, que como sabemos es equivalente. El valor encontrado por él (5,45 veces la densidad del agua) tiene un error de sólo 1,2% respecto del valor actual.

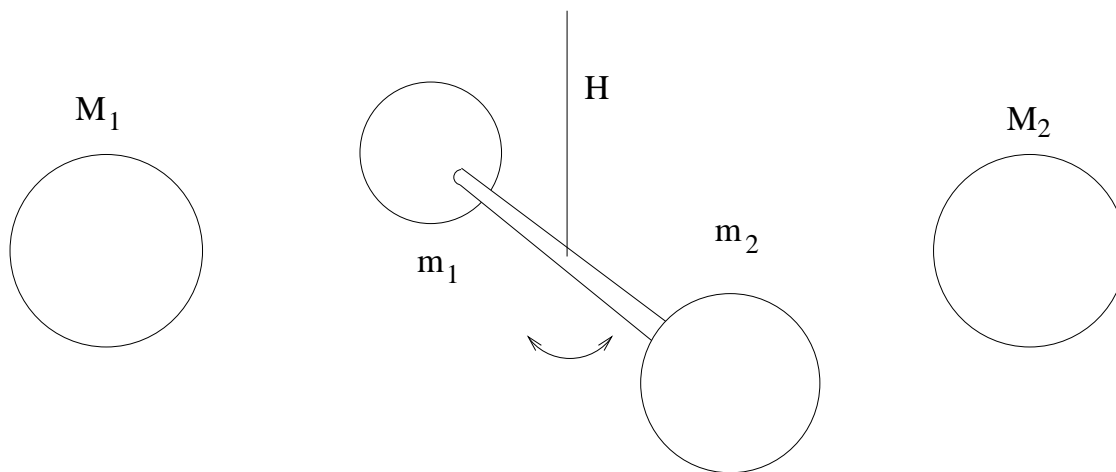


Fig. 4.5 Péndulo de torsión de Cavendish

El péndulo de torsión fue también usado en 1885 por el físico húngaro Loránd Eötvös (1848–1919) para medir con exactitud otra importante propiedad de la gravedad: la equivalencia entre la masa gravitacional y la masa inercial.

El experimento de Eötvös está basado en que el peso de un cuerpo que se mide no es simplemente la atracción de la Tierra sino que tiene una componente de fuerza centrífuga $-m\vec{a}_C = m\omega^2\vec{r}$ dirigida en la dirección radial perpendicular al eje terrestre. Esta fuerza aparente corresponde a la aceleración centrípeta que tienen los cuerpos que giran junto con la Tierra. El efecto es pequeño pero no despreciable; la aceleración de gravedad es unas 300 veces mayor que la aceleración centrípeta en el Ecuador. La componente gravitacional del peso efectivo es proporcional a la masa gravitacional mientras que la fuerza centrífuga es proporcional a la masa inercial,

$$\vec{g}_{\text{ef}} = \vec{g} - \frac{m}{m_g} \vec{a}_C .$$

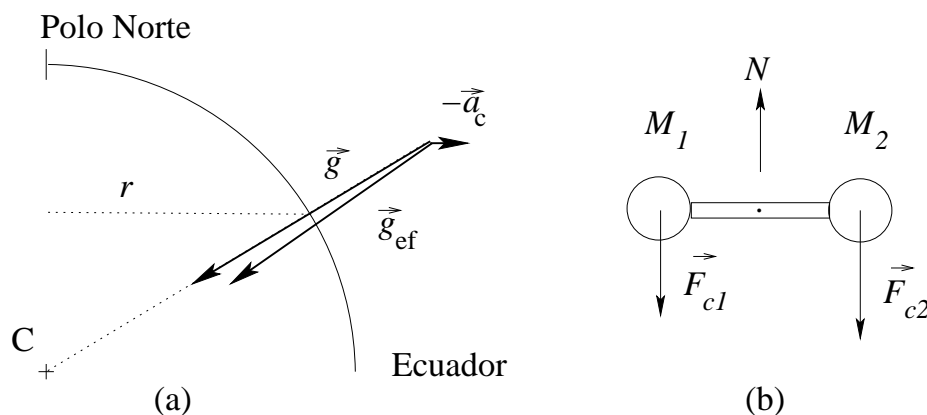


Fig. 4.6 Aceleración de gravedad efectiva

(a) Aceleración de gravedad efectiva compuesta por la aceleración de gravedad verdadera \vec{g} y la componente centrífuga $-\vec{a}_c$. (b) Vista horizontal del péndulo de torsión mostrando una eventual diferencia de fuerzas centrífugas.

La componente horizontal de la fuerza centrífuga está en la dirección Norte-Sur, por lo tanto si dos cuerpos de igual masa gravitacional se guindan de un hilo formando un péndulo

de torsión y si hubiera una diferencia en las masas inerciales habría una diferencia entre las fuerzas centrífugas que produciría un corrimiento del punto de equilibrio del péndulo de torsión. Tal corrimiento dependería de la orientación del péndulo respecto al meridiano. El efecto sería nulo en la orientación Norte-Sur y máximo en la orientación Este-Oeste. Nunca ha sido detectada diferencia alguna. Según los resultados actuales ambas masas son iguales con una precisión mejor que una parte en 10^{11} . Sin embargo este resultado se limita a materia *normal* formada por electrones, protones y neutrones, compuestas estas dos últimas partículas por los quarks u y d ; no sabemos que pasa con la *antimateria* ni con otras partículas elementales como los quarks s , c , b o t o los leptones pesados μ o τ .

La teoría de gravitación de Einstein, la Relatividad General, asume como verdadero el **Principio de Equivalencia** que implica la identidad de las masas gravitacional e inercial.

Cohete

Nada de lo que suceda al interior de un cuerpo que se encuentre libre de fuerzas externas puede modificar el movimiento rectilíneo uniforme de su centro de masas. La única manera de que el cuerpo adquiera una aceleración es que se desprenda de parte de su masa. Es lo que sucede en los cohetes. Típicamente un cohete eyecta un chorro de gas a alta velocidad, el cohete se acelera pero el centro de masas del sistema formado por el gas y el cohete se mantiene sin aceleración.

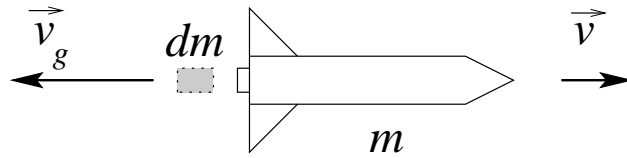


Fig. 4.7 Cohete

Consideremos un cohete de masa $m(t)$ y velocidad \vec{v} que eyecta gas a una velocidad \vec{v}_g relativa al cohete. Supondremos que sobre el cohete actúa una fuerza \vec{F} . En un lapso de tiempo dt la variación de la masa del cohete será dm y la masa del gas eyectado será $|dm| = -dm$. La cantidad de movimiento del cohete en el instante t será

$$\vec{p}(t) = m(t)\vec{v}(t)$$

y la del sistema formado por el gas eyectado y el cohete el instante $t + dt$

$$\vec{p}(t + dt) = (\vec{v}_g + \vec{v})|dm| + (m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) .$$

El incremento de la cantidad de movimiento es en primer orden

$$d\vec{p} = \vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = m d\vec{v} - dm \vec{v}_g .$$

Ese incremento de \vec{p} debe ser igual al impulso de la fuerza \vec{F}

$$m d\vec{v} - dm \vec{v}_g = \vec{F} dt .$$

Dividiendo por dt se obtiene finalmente la ecuación del cohete,

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt} \vec{v}_g . \quad (64)$$

Fuerzas de una cuerda ideal

En lo que sigue trataremos algunos tipos de fuerzas macroscópicas. Comenzaremos tratando las fuerzas en una cuerda, que es un medio muy común para aplicar fuerzas a los cuerpos. Sobre un segmento de cuerda AB actúan el peso y las fuerzas \vec{F}_A y \vec{F}_B que ejercen los segmentos adyacentes. Estas dos últimas fuerzas son tangentes a la cuerda. Por la segunda ley de la mecánica

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}_B .$$

Una cuerda ideal es inextensible y tiene masa y grosor despreciables, por lo que \vec{F}_A y \vec{F}_B son opuestas $\vec{F}_A = -\vec{F}_B$, independientemente del movimiento. La cuerda ideal adquiere la forma de un segmento de recta y la magnitud de la fuerza que ejerce un pedazo sobre otro, que llamamos **tensión**, es la misma a todo lo largo de la cuerda.

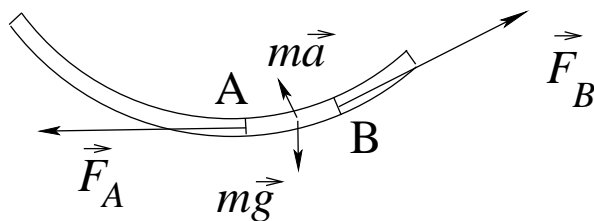


Fig. 4.8 Fuerzas en un segmento de cuerda real

Fuerzas de contacto. Fricción seca

Otro tipo de fuerzas macroscópicas son las fuerzas entre dos superficies en contacto. Consideremos un cuerpo C en contacto con una superficie S . La fuerza \vec{F} que la superficie ejerce sobre el cuerpo tiene dos componentes, una fuerza normal a la superficie \vec{F}_N y una fuerza de fricción o rozamiento \vec{F}_R paralela a la superficie. Por lo general la componente normal debe ser repulsiva, a menos que la superficie no tenga algún tipo de pega. La fuerza normal está determinada por la condición de que el cuerpo y la superficie sean impenetrables, por lo que las componentes normales de las velocidades del cuerpo y la superficie deben ser iguales.

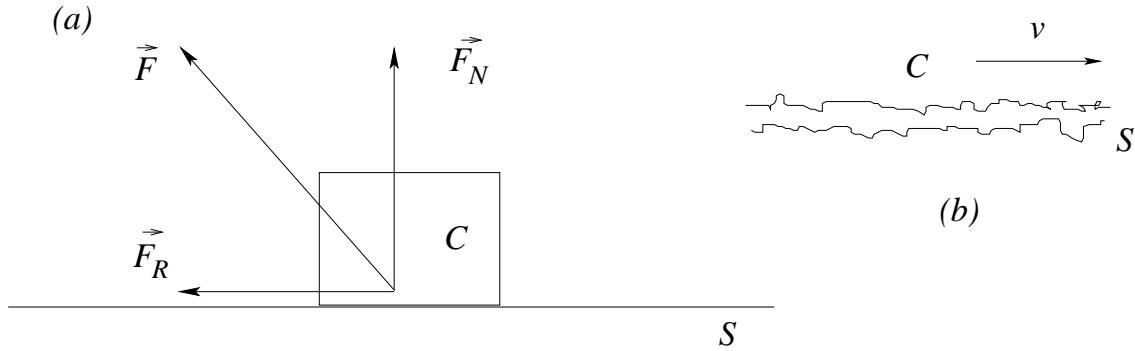


Fig. 4.9 Fuerza de contacto de una superficie sobre un cuerpo

(a) Componentes normal y de rozamiento de la fuerza de contacto. (b) Vista microscópica de las superficies. El rozamiento es producido por el choque entre las irregularidades de una superficie con las de la otra.

La fuerza de rozamiento depende de las características de las dos superficies. Un caso típico es el de la fricción seca, cuya teoría fue desarrollada por el físico francés Charles de Coulomb (1736–1806). En este caso hay dos tipos de rozamiento, la fricción *estática*, cuando no hay movimiento relativo del cuerpo con respecto a la superficie y la fricción *dinámica* cuando lo hay. El rozamiento estático puede tener cualquier dirección paralela a la superficie y cualquier magnitud hasta un máximo, que es proporcional a la magnitud de la fuerza normal. Para cada par de superficies hay un coeficiente de fricción estática μ_e que determina el valor del máximo roce estático

$$|\vec{F}_R| \leq \mu_e |\vec{F}_N|. \quad (65)$$

Cuando esta condición no se cumple el cuerpo necesariamente se desliza sobre la superficie.

A diferencia del rozamiento estático el dinámico está determinado; su magnitud es proporcional a la magnitud de la fuerza normal y su dirección es antiparalela a la velocidad relativa del cuerpo respecto de la superficie,

$$\vec{F}_R = -\mu_d |\vec{F}_N| \hat{v}. \quad (66)$$

El vector \hat{v} es el versor de la velocidad relativa del cuerpo C respecto de la superficie S . Típicamente el coeficiente de fricción dinámica μ_d es ligeramente menor que μ_e , de manera que se requiere de una fuerza mayor para poner en movimiento el cuerpo que para mantenerlo deslizándose. Esto es debido a que cuando el cuerpo está en reposo las irregularidades de una superficie se encajan en las de la otra.

Fricción fluida

Cuando un cuerpo se mueve dentro de un líquido o de un gas, el fluido ejerce una fuerza de fricción sobre el cuerpo. En general esta fuerza es complicada, dependiendo de la velocidad relativa del cuerpo respecto al fluido, la forma del cuerpo, sus dimensiones y la orientación respecto al movimiento relativo. Si el cuerpo es simétrico respecto a la dirección del movimiento la fricción fluida toma la forma

$$\vec{F}_F = -f(v)\hat{v} \quad (67)$$

donde $f(v)$ es una función de la rapidez y \hat{v} es el versor de la velocidad. A baja velocidad la fricción es proporcional a la velocidad, $f(v) \approx Av$. La constante A depende de la viscosidad del fluido y de las dimensiones transversales del cuerpo. A más alta velocidad $f(v) \approx Bv^2$ y la constante B es proporcional al área transversal del cuerpo. El origen físico de la fricción fluida son las corrientes de fluido que producen las masas de fluido desplazadas por el cuerpo en movimiento y la fricción interna del fluido (viscosidad) que se manifiesta cuando diferentes capas de fluido se mueven con velocidades diferentes.

En el caso de dos superficies lubricadas el rozamiento es esencialmente fluido, proporcional a la velocidad y dependiente del espesor de la película de lubricante.

Fuerzas elásticas. Ley de Hooke

Cuando se aplican fuerzas a los sólidos, estos se deforman. Si las fuerzas son pequeñas las deformaciones son elásticas, esto es son reversibles y proporcionales a las fuerzas $\Delta l \propto F$. Esta ley fue descubierta por el naturalista inglés Robert Hooke (1635–1703). Un ejemplo típico son los resortes. La magnitud de la fuerza aplicada es proporcional a la elongación o estiramiento

$$F = k\Delta l . \quad (68)$$

La constante k del resorte mide su rigidez.

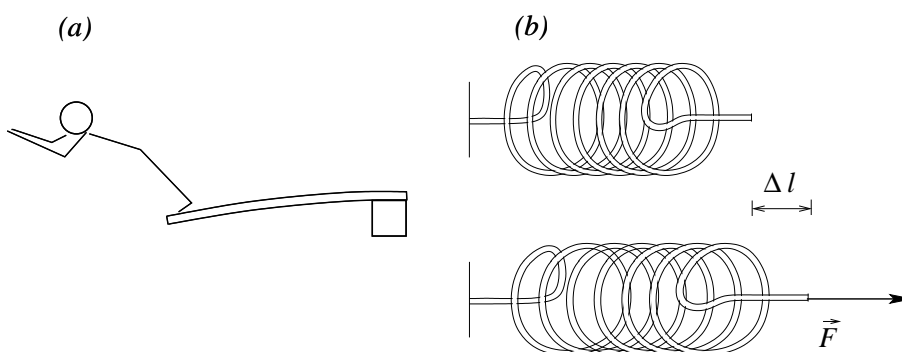


Fig. 4.10 Fuerzas elásticas

(a) Trampolín. (b) Resorte.

Un ejemplo: Plano inclinado con roce

En esta sección estudiaremos un ejemplo lo suficientemente complejo como para poner a prueba varios conceptos importantes de la mecánica, como son sistemas de varios cuerpos que se mueven acopladamente, fricción y cuerdas y poleas ideales. El sistema en cuestión se muestra en la figura 4.11 y consiste en un plano solidario con el piso y que tiene una inclinación θ respecto al plano horizontal. Sobre el plano se desliza en la dirección de máxima pendiente un cuerpo de masa m_1 . Entre el cuerpo y el plano hay rozamiento seco con coeficientes de fricción estática μ_e y dinámica μ_d . El cuerpo es halado por una cuerda que pasando por una polea P sin masa y sin fricción lo conecta con un cuerpo colgante de masa m_2 .

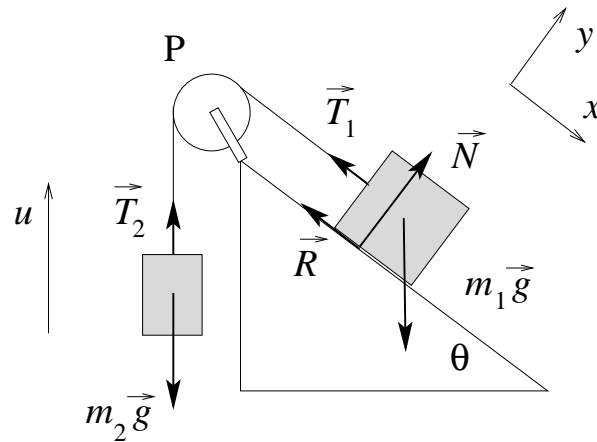


Fig. 4.11 Plano inclinado con roce

El desplazamiento genérico de un cuerpo sólido y rígido está compuesto de una translación, determinada por tres números (el vector desplazamiento) y de una rotación, también determinada por tres números: un ángulo de rotación y dos cosenos directores de la dirección del eje de rotación. Decimos que un cuerpo rígido tiene 6 *grados de libertad*. Un sistema formado por N cuerpos rígidos tiene en general $6N$ grados de libertad. Un cuerpo que no es rígido, como por ejemplo una cuerda tiene *infinitos* grados de libertad. En general la determinación de la configuración de un sistema, esto es de la posición de sus elementos puede ser una tarea tremendamente complicada. Sin embargo usualmente existen condiciones que limitan los movimientos posibles del sistema. En mecánica estas condiciones se denominan **vínculos** o **ligaduras**. Los vínculos pueden ser debidos a la construcción del sistema o simplemente a que estemos interesados en estudiar solamente cierto tipo de movimientos. Por ejemplo en el caso en estudio la polea solamente puede rotar, sin roce, alrededor de un eje horizontal y paralelo al plano inclinado. Tiene un solo grado de libertad. El cuerpo que desliza no puede penetrar el plano inclinado, por lo que si el cuerpo está en contacto con el plano debe necesariamente ser $v_{1y} \geq 0$. Esto por construcción, pero en realidad estamos interesados solamente en movimientos de translación en la dirección x , por lo que $v_{1y} = v_{1z} = 0$. El cuerpo que cuelga se puede mover en cualquier dirección, pero estamos interesados solamente en el movimiento vertical $\vec{v}_2 = v_{2u}\hat{u}$. Finalmente supondremos que la cuerda es inextensible y se encuentra continuamente en tensión. Esta última condición implica que el movimiento de los dos cuerpos está acoplado. Si en cuerpo 1 sufre un cierto desplazamiento en la dirección x el cuerpo 2 tiene un desplazamiento de igual magnitud en la dirección vertical. Esto es

$$v_{1x} = v_{2u} . \quad (69)$$

Capítulo 4: Dinámica

Después de analizar las diferentes partes del sistema y sus vínculos hay que determinar cuales son las fuerzas que actúan sobre cada parte y escribir la correspondiente ley de Newton.

Consideremos primero el conjunto formado por la polea y la cuerda. Las fuerzas externas al conjunto son la fuerza que ejerce el eje sobre la polea (que no está indicada en la figura) y las reacciones $-\vec{T}_1$ y $-\vec{T}_2$ de las fuerzas con las que la cuerda tira de los cuerpos. Como ni la polea ni la cuerda tienen masa las tres fuerzas se anulan. Las fuerzas entre la cuerda y la polea están distribuidas en la zona de contacto entre estos dos cuerpos. Debido a que la polea rota sin roce y no tiene masa es incapaz de producir fuerzas tangenciales sobre la cuerda. Esto implica que la tensión es la misma a ambos lados de la cuerda

$$T_1 = T_2 = T . \quad (70)$$

Veamos el cuerpo colgante. Las fuerzas que actúan sobre este cuerpo son su peso $-m_2g\hat{u}$ y la fuerza de la cuerda $\vec{T}_2 = T\hat{u}$. La ecuación del movimiento resulta

$$m_2a_{2u} = T - m_2g . \quad (71)$$

La situación del cuerpo 1 es un poco más compleja. Además del peso $m_1\vec{g}$ y de la tracción de la cuerda \vec{T}_1 , están la fuerza normal al plano inclinado \vec{N} y el rozamiento \vec{R} ,

$$m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{N} + \vec{R} .$$

Conviene descomponer esta ecuación en sus componentes normal y paralela al plano inclinado, $\vec{g} = g \sin \theta \hat{x} - g \cos \theta \hat{y}$,

$$0 = N - m_1g \cos \theta , \quad (72)$$

y

$$m_1a_{1x} = m_1g \sin \theta - T + R_x . \quad (73)$$

Tenemos en total cinco incógnitas, a_{1x} , a_{2u} , T , R_x , N y cuatro ecuaciones (69), (71), (72), y (73). El roce R_x depende del estado del movimiento. Si la situación es de equilibrio, $v_{1x} = 0$, $a_{1x} = 0$, la tensión es igual al peso del cuerpo 2, $T = m_2g$. Si no hubiera roce el equilibrio se consigue cuando $m_2 = m_1 \sin \theta$. En presencia de roce el equilibrio es posible siempre que se cumpla la condición de la fricción estática (65),

$$|m_1 \sin \theta - m_2| < \mu_e m_1 \cos \theta . \quad (74)$$

La fuerza de roce es la necesaria para que los cuerpos no se muevan

$$R_x = m_2g - m_1g \sin \theta .$$

Cuando los cuerpos se mueven el roce es de tipo dinámico, proporcional a la reacción normal y con sentido contrario al de la velocidad \vec{v}_1

$$R_x = -\mu_d m_1g \cos \theta \text{sign}(v_{1x}) .$$

Podemos resolver el sistema de ecuaciones y obtenemos la aceleración

$$a_{1x} = g \frac{m_1 \sin \theta - m_2 - \mu_d m_1 \cos \theta \text{sign}(v_{1x})}{m_1 + m_2} . \quad (75)$$

Cuando la velocidad es contraria al desbalance de masas $m_1 \sin \theta - m_2$ el roce y la fuerza debida al desbalance tienen el mismo sentido y el movimiento es retardado. Cuando la velocidad tiene el mismo sentido que el desbalance el movimiento es retardado o acelerado dependiendo si domina el roce o el desbalance. Cuando se cumple la condición

$$|m_1 \sin \theta - m_2| < \mu_d m_1 \cos \theta \quad (76)$$

la fuerza dominante es el roce, el movimiento es retardado y los cuerpos tienden a pararse. En este caso cualquiera que sea el sentido inicial de la velocidad los cuerpos terminan en reposo. Como en general $\mu_d \leq \mu_e$ cuando no se cumple la condición de equilibrio del roce estático (74) tampoco se cumple la condición (76), por lo que cualquiera que sea el sentido de la velocidad inicial los cuerpos terminan en un movimiento acelerado en el que la velocidad y la aceleración tienen el mismo sentido.

El caso más interesante es cuando se cumple la condición (74) pero no la (76)

$$\mu_d m_1 \cos \theta < |m_1 \sin \theta - m_2| < \mu_e m_1 \cos \theta .$$

Hay dos soluciones posibles, cuerpos en reposo o moviéndose aceleradamente. En realidad la solución del reposo es *metaestable*, una perturbación puede hacer que haya una transición de roce estático a dinámico y que los cuerpos comiencen súbitamente a moverse.

Capítulo 5

Trabajo y Energía

Potencia de una fuerza

Consideremos una partícula con velocidad \vec{v} sobre la que actúa una fuerza \vec{F} , se llama **potencia** de la fuerza al producto escalar

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv \cos \theta . \quad (77)$$

El signo de la potencia depende del ángulo θ que forman la fuerza y la velocidad; es positivo si la fuerza actúa a *favor* del movimiento (ángulo agudo) y es negativo si la fuerza actúa en *contra* (ángulo obtuso).

La unidad de potencia es el vatio (W) nombrada en honor al ingeniero escocés James Watt (1736–1819), $1 \text{ W} = 1 \text{ J s}^{-1} = 1 \text{ N m s}^{-1}$.

Trabajo de una fuerza

Consideremos ahora que la partícula se mueve desde el punto A en el instante t_A al punto B en el instante t_B , el trabajo hecho por la fuerza en el lapso t_A – t_B es por definición

$$W_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_{t_A}^{t_B} P dt . \quad (78)$$

La unidad de trabajo es el julio o Joule, nombrada en honor al físico inglés James Prescott Joule (1818–1889), $1 \text{ J} = 1 \text{ N m}$. La potencia es la derivada del trabajo respecto al tiempo $P = dW/dt$.

Energía cinética

Se llama energía cinética de una partícula a $1/2$ de la masa por el cuadrado de la velocidad

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 . \quad (79)$$

La energía y el trabajo tienen las mismas unidades.

Teorema del trabajo y la energía cinética

Supongamos ahora que \vec{F} sea la fuerza neta que actúa sobre la partícula. Su potencia será

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = m\vec{a} \cdot \vec{v} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}m \frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{dE_K}{dt} .$$

Integrando entre los instantes t_A y t_B obtenemos que *el incremento de la energía cinética en ese lapso es igual al trabajo de la fuerza neta en el mismo lapso*,

$$\Delta E_K = E_K(t_B) - E_K(t_A) = W_{AB} . \quad (80)$$

El trabajo como integral de línea

El trabajo entre dos puntos A y B depende de la trayectoria y del valor de la fuerza en cada uno de sus puntos, pero no de la rapidez con la que se recorre. Consideremos una ecuación paramétrica cualquiera del camino recorrido por la partícula $\vec{x}(\lambda)$, $\lambda_A \leq \lambda \leq \lambda_B$. El movimiento está determinado por el valor del parámetro como función del tiempo, $\lambda(t)$. La velocidad será

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d\vec{x}}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dt}.$$

Podemos entonces escribir el trabajo como

$$W_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{x}}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dt} dt = \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{x}}{d\lambda} d\lambda,$$

donde en el último paso hicimos un cambio de variable de integración.

Lo que esto quiere decir es que la integral del trabajo es independiente de la parametrización de la trayectoria, siendo el movimiento una de esas parametrizaciones. Si llamamos \mathcal{C}_{AB} al camino que recorre la partícula entre A y B podemos escribir el trabajo como una integral de camino o de línea,

$$W_{AB} = \int_{\mathcal{C}_{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{x}. \quad (81)$$

La integral de línea se calcula con cualquier parametrización con la fórmula dada más arriba. También podemos definir la integral de línea directamente como un límite. Partamos la trayectoria \mathcal{C}_{AB} en N trozos, separados por los puntos $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{N-1}$. Poniendo $\vec{OA} = \vec{x}_0$ y $\vec{OB} = \vec{x}_N$ podemos definir los desplazamientos

$$\Delta\vec{x}_k = \vec{x}_k - \vec{x}_{k-1},$$

y \vec{F}_k , el valor de la fuerza en algún punto del trozo k -ésimo. La integral del trabajo será entonces

$$\int_{\mathcal{C}_{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \vec{F}_k \cdot \Delta\vec{x}_k. \quad (82)$$

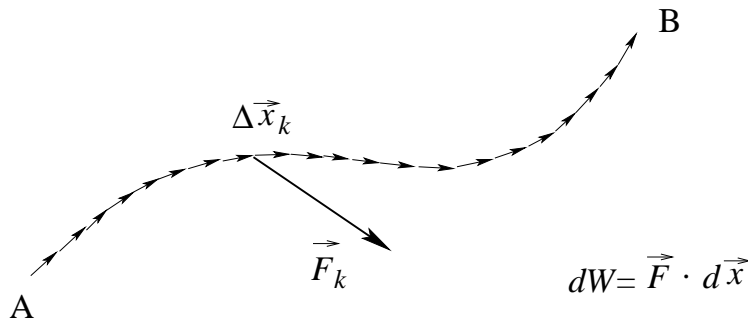


Fig. 5.1 Trabajo como integral de camino

Fuerzas conservativas y energía potencial

Se denomina **conservativa** una fuerza \vec{F} con las siguientes características

- Debe ser un *campo* de fuerza, o sea debe depender de la posición \vec{x} de la partícula, pero no debe depender, ni de la velocidad ni del tiempo.
- La integral del trabajo entre dos puntos cualesquiera debe depender exclusivamente de los puntos inicial y final, pero no del camino para ir del uno al otro.

Esta última propiedad también se puede expresar como, *la integral del trabajo en un camino cerrado cualquiera debe ser nula.*

$$\forall \mathcal{C} : \oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{x} = 0 . \quad (83)$$

El pequeño círculo en el signo de integración sirve para recordar que el camino es cerrado.

Las fuerzas de fricción, que dependen de la velocidad, no son conservativas.

Para toda fuerza conservativa se puede definir un campo escalar $U(\vec{x})$ (o sea un escalar que es función del punto), que denominamos **energía potencial** de la siguiente manera:

- Escogemos un punto arbitrario O y le asignamos a la energía potencial un valor también arbitrario en ese punto U_O ,
- El valor de U en otro punto cualquiera A se calcula con la fórmula

$$U(A) = U_O - \int_O^A \vec{F} \cdot d\vec{x} . \quad (84)$$

La energía potencial está definida a menos de una constante aditiva. Esto no representa ningún problema porque lo que tiene interés físico son las diferencias de energía potencial.

Lo interesante de la energía potencial es que permite calcular el trabajo de la fuerza entre dos puntos como una diferencia de energías potenciales, más precisamente, *el trabajo de una fuerza conservativa entre los puntos A y B es igual a la disminución de la energía potencial correspondiente.*

$$W_{AB} = U(A) - U(B) = -\Delta U . \quad (85)$$

Conservación de la energía

Consideremos una partícula que se mueve entre los puntos A y B bajo la acción de una fuerza neta conservativa. El incremento de la energía cinética es igual al trabajo y este a su vez es igual a la disminución de energía potencial

$$\Delta E_K = W_{AB} = -\Delta U .$$

Podemos definir la **energía mecánica total** como la suma de la energía cinética más la potencial,

$$E = E_K + U = \frac{1}{2}mv_A^2 + U(A) . \quad (86)$$

El valor de la energía mecánica total se conserva durante el movimiento, $\Delta E = 0$.

Consideraciones sobre la conservación de la energía

Hay un tipo de fuerzas que no son conservativas en sentido estricto, porque dependen de la velocidad, pero que no impiden la conservación de la energía. Nos referimos a fuerzas que son perpendiculares a la velocidad y que por tanto tienen trabajo cero. En esta categoría están las fuerzas magnéticas sobre una carga y la fuerza normal que ejerce una superficie de reposo sobre un cuerpo vinculado a moverse sobre ella. En cambio la otra componente de las fuerzas de contacto, la fricción, siempre produce un trabajo negativo y por eso se califica como **disipativa**.

Por lo que conocemos hasta hoy, las fuerzas fundamentales, a saber, electromagnetismo, gravedad, fuerza nuclear débil y nuclear fuerte, son conservativas. Siendo esto así la energía *siempre* se conserva. La razón por la que algunas fuerzas macroscópicas aparecen como no-conservativas es porque lo que consideramos como energía de un cuerpo macroscópico es solamente parte de su verdadera energía, que es la suma de las energías cinéticas y potenciales de todos sus componentes microscópicos. Un cuerpo macroscópico tendrá, además de su energía mecánica macroscópica, una **energía interna**. Por ejemplo el trabajo del rozamiento de un cuerpo sobre una superficie se convierte en energía interna del cuerpo y de la superficie.

Energía potencial de una fuerza constante. Peso

Una fuerza constante siempre es conservativa. El trabajo entre dos puntos A y B es

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{x} = \vec{F} \cdot \int_A^B d\vec{x} = \vec{F} \cdot \vec{AB} ,$$

y la energía potencial es

$$U(B) = U_O - \vec{F} \cdot \vec{OB} .$$

El peso de un cuerpo puntual en la superficie terrestre es un caso particular. Si escogemos el eje z como vertical hacia arriba, el peso es $-mg\hat{k}$ y la energía potencial gravitatoria en un punto B es

$$U(B) = U_O + mgz_B .$$

Para un cuerpo extendido de masa total M , formado por partículas de masa m_k y posición \vec{x}_k el peso total es $M\vec{g}$ y la energía potencial gravitatoria total es

$$U = \sum_k m_k g z_k + \text{const.} = Mg z_G + \text{const.} , \quad z_G = \frac{1}{M} \sum_k m_k z_k , \quad (87)$$

donde z_G es la altura del centro de masas del cuerpo.

Fuerza correspondiente a una energía potencial. Gradiente

El conocimiento de la energía potencial $U(x, y, z)$ permite determinar el campo de fuerza correspondiente $\vec{F}(x, y, z)$. De la definición se deduce la siguiente relación entre el incremento diferencial de la energía potencial dU y el desplazamiento diferencial $d\vec{x}$.

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{x} = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (88)$$

Para cada energía potencial hay una familia de superficies determinadas por las ecuaciones implícitas del tipo

$$U(x, y, z) = \text{const.} \quad (89)$$

Son las superficies **equipotenciales**. Por ejemplo en el caso del peso las superficies equipotenciales son los planos horizontales. Un desplazamiento $d\vec{x}$ sobre una superficie equipotencial implica $dU = 0$. Por lo tanto la fuerza \vec{F} debe ser *perpendicular* a las superficies equipotenciales. La fuerza tiene el sentido en el que la energía potencial disminuye. Si tomamos un desplazamiento dl perpendicular a la superficie equipotencial la magnitud de la fuerza es

$$F = \left| \frac{dU}{dl} \right|.$$

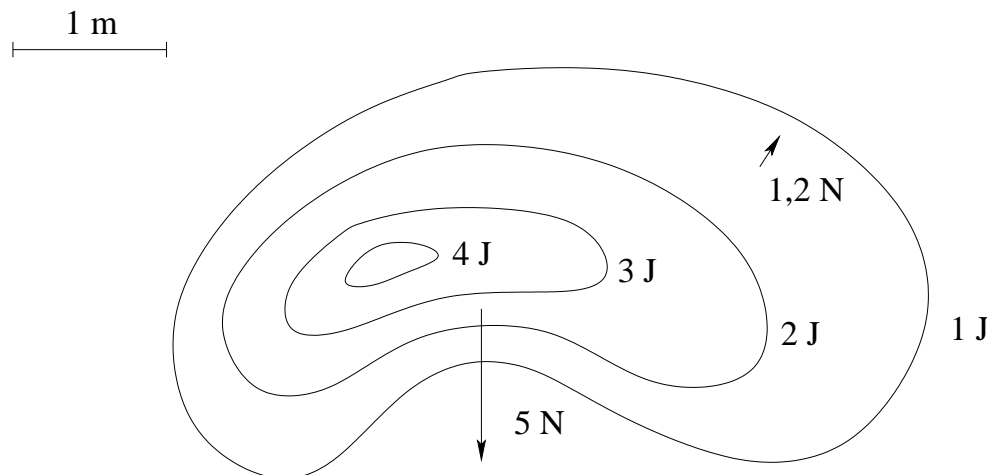


Fig. 5.2 Energía potencial en 2D

Ejemplo de energía potencial $U(x, y)$ en dos dimensiones. Se muestran algunas curvas equipotenciales y la fuerza en dos puntos.

Se puede determinar la componente F_x de la fuerza tomando un desplazamiento en la dirección x , $d\vec{x} = dx\hat{i}$,

$$F_x = -\frac{dU}{dx}.$$

En matemática, en un caso como este en el que hay varias variables con respecto a las cuales podríamos derivar, se usa el símbolo ∂ en vez de la d en el símbolo de derivada para recordarnos precisamente eso. Se habla de derivada parcial. Tenemos entonces

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \quad (90)$$

También se define gradiente de la función escalar $U(x, y, z)$ al *vector* cuyas componentes son las derivadas parciales. Se usa una delta invertida ∇ para indicar el gradiente. El símbolo se llama *nabla*.

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{k} \quad (91)$$

y

$$\vec{F} = -\nabla U . \quad (92)$$

Condición necesaria para que una fuerza sea conservativa

En una dimensión, o sea en una partícula que esté vinculada a moverse en determinada trayectoria, toda fuerza que dependa de la coordenada curvilínea s es conservativa. Esto porque hay una sola manera de ir de un punto a otro. Si F_s es la componente tangencial de la fuerza tenemos

$$F_s = -\frac{dU}{ds} .$$

En dos y tres dimensiones esto no es cierto porque hay infinitos caminos posibles para moverse entre dos puntos. La comprobación de si un campo de fuerza es conservativo o no, usando la definición, puede ser bastante engorrosa. Afortunadamente hay una condición local que la fuerza debe cumplir para ser conservativa. La condición es consecuencia del hecho de que el orden de las derivadas parciales respecto a dos variables diferentes se puede invertir,

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

análogamente

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} , \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \quad (93)$$

Energía potencial de la fuerza de un resorte

Consideremos un cuerpo conectado a un extremo de un resorte cuyo otro extremo está fijo a una pared como vemos en la figura 5.3. El cuerpo se puede mover a lo largo de una línea cuya coordenada es x . La posición x_0 corresponde al punto de equilibrio del resorte. Cuando $x \geq x_0$ el resorte está estirado y cuando $x \leq x_0$ comprimido. Por la ley de Hooke la componente x de la fuerza que hace el resorte sobre el cuerpo es

$$F_x = -k(x - x_0) .$$

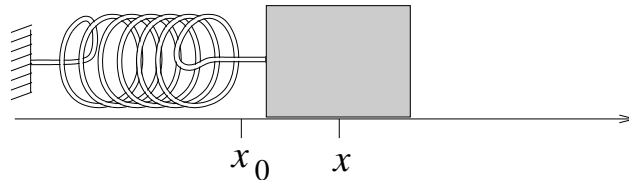


Fig. 5.3 Resorte

Como el problema es de una dimensión la fuerza es conservativa y podemos encontrar la energía potencial integrando

$$U(x) = U(x_0) - \int_{x_0}^x F_x dx = U(x_0) + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 . \quad (94)$$

Siempre podemos escoger la constante $U(x_0)$ como cero.

Energía potencial de una fuerza central

Un tipo de fuerza que siempre es conservativo son las fuerzas **centrales**. Para este tipo de fuerza existe un punto C , el centro de la fuerza, respecto al cual la fuerza es radial. La magnitud de la fuerza debe ser una función de la distancia entre la posición de la partícula P y el centro C . En otras palabras, poniendo $\vec{r} = \vec{CP}$, la fuerza debe tener la forma

$$\vec{F} = f(r)\hat{r}.$$

La razón por la que la fuerza es conservativa es que

$$dr = |d\vec{x}| \cos \theta = \hat{r} \cdot d\vec{x}$$

como se puede ver en la figura 5.4, luego

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{x} = -f(r) dr$$

de donde

$$U(r) = - \int f(r) dr + \text{const.} \quad (95)$$

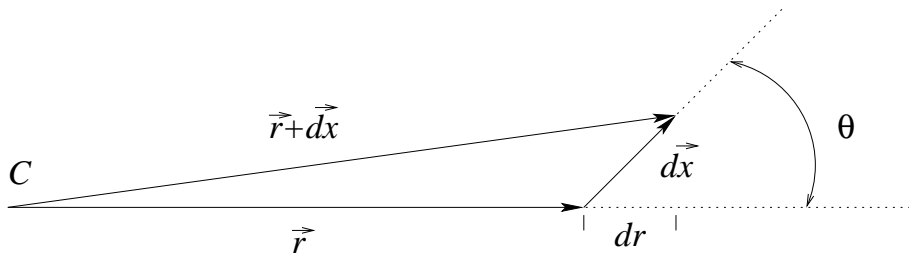


Fig. 5.4 Componente radial del desplazamiento diferencial

Las superficies equipotenciales de una fuerza central son esferas centradas en el centro de la fuerza C .

Energía potencial de la gravedad

Como caso particular de fuerza central podemos estudiar la fuerza de gravedad que ejerce un cuerpo de masa M , supuesto fijo en el origen, sobre otro de masa m y cuya posición es \vec{r} . La fuerza es

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

y la energía potencial

$$U(r) = -\int f(r) dr = GMm \int r^{-2} dr = -\frac{GMm}{r} + \text{const.} \quad (96)$$

En este caso la constante es el valor de la energía potencial cuando la separación entre los cuerpos es infinita. Podemos escoger el valor cero para la constante. Para fijar las ideas pongamos que el cuerpo fijo sea la Tierra y el móvil un satélite artificial que se mueve bajo la acción de la sola gravedad terrestre. La energía mecánica total será

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}.$$

Si la energía es positiva $E > 0$ el cuerpo puede alejarse indefinidamente y aún conservar una energía cinética. En este caso la órbita es abierta. En cambio si $E < 0$ el cuerpo no puede alejarse más allá de una cierta distancia r_{max} en la que la energía cinética se anula

$$r_{\text{max}} = \frac{GMm}{-E}.$$

La órbita es acotada y el satélite se mantiene rotando alrededor de la Tierra o bien cae en ella.

Podemos calcular la mínima velocidad que hay que impartirle al satélite en la superficie terrestre para que pueda alejarse indefinidamente. Tal velocidad se llama velocidad de escape v_e y se determina imponiendo que la energía sea cero para una distancia igual al radio de la Tierra R

$$0 = \frac{1}{2}mv_e^2 - \frac{GMm}{R}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR} \approx 11\,170 \text{ m/s}. \quad (97)$$

Estudio de gráficos $U(x)$ contra x

La ecuación de la conservación de la energía contiene mucha información sobre el movimiento de los cuerpos. En una dimensión lo determina. Por eso es mucho lo que se puede obtener del análisis cualitativo de las gráficas de la energía potencial.

Consideremos por ejemplo el gráfico de la figura 5.5. Los puntos críticos de la gráfica son los puntos donde la fuerza es cero $F_x = -dU/dx$. Si la partícula se encuentra en esos puntos con velocidad cero se mantiene permanentemente en ellos. Por eso se llaman puntos de **equilibrio**. Los mínimos relativos como A y C son puntos de equilibrio **estable**. Una pequeña desviación del punto de equilibrio produce fuerzas que tienden a mantener la partícula cerca del mismo. En cambio si el punto es un máximo relativo como el punto B el equilibrio es **inestable**. Una pequeña desviación produce fuerzas que tienden a alejar la partícula del punto de equilibrio. También hay puntos como D que están rodeados de puntos donde la fuerza es cero. Una pequeña desviación no produce fuerzas. Estos puntos se llaman de equilibrio **indiferente**.

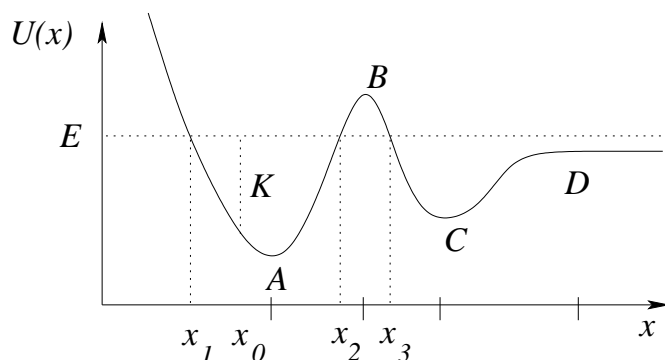


Fig. 5.5 Gráfico de $U(x)$

La energía mecánica $E = K + U$ se mantiene constante, por lo que en el gráfico aparece como una línea horizontal. En un punto cualquiera como x_0 la energía cinética K está representada por la distancia entre $U(x)$ y la línea $E = \text{const}$. La energía cinética no puede ser negativa $K = E - U(x) \geq 0$. Esta condición determina las zonas en las que puede moverse la partícula. Estas zonas están limitadas por los **puntos de retorno** en los que la velocidad se anula y que se determinan con la condición $E = U(x)$. En el ejemplo la partícula puede moverse en dos intervalos $x_1 \leq x \leq x_2$ y $x_3 \leq x$. En el primer intervalo el movimiento es oscilatorio. Si partimos de x_1 la partícula se mueve acelerándose hacia A punto en el que la rapidez es máxima. De allí en adelante el movimiento es retardado hasta llegar al punto de retorno x_2 . A continuación se recorre el camino inverso. El otro intervalo corresponde a una órbita abierta. La partícula se acerca desde el infinito a velocidad constante, luego al acercarse a C se acelera y después de C se retarda hasta llegar a x_3 para después recorrer el camino inverso alejándose indefinidamente.

Integración de la ecuación de la energía en una dimensión

Consideremos una partícula vinculada a moverse sobre determinada trayectoria. Sea s la coordenada curvilínea sobre la trayectoria, $v = ds/dt$ la velocidad, $a = dv/dt$ la aceleración tangencial y f la componente tangencial de la fuerza neta. En general la fuerza es una función del tiempo t , la posición s y la velocidad v . La componente tangencial de la segunda ley de Newton es la ecuación que determina el movimiento $s(t)$,

$$ma = f(t, s, v) .$$

Este es un caso de **ecuación diferencial** donde la incógnita es una función $s(t)$ y en la que aparecen derivadas de la incógnita. El orden de la ecuación es el máximo orden de las derivadas de la incógnita que aparece. La ecuación es de segundo orden, porque aparece la aceleración. No hay una fórmula general para resolver ecuaciones diferenciales, pero hay casos particulares que se pueden resolver. Uno de esos casos es cuando la fuerza es función exclusivamente del tiempo, $f(t)$. Este caso se resuelve simplemente integrando una vez la ecuación para obtener la velocidad $v(t)$ y una segunda vez para obtener la ley horaria $s(t)$. Otro caso que se resuelve es cuando la fuerza es función exclusivamente de la posición $f(s)$. En este caso la fuerza es conservativa y tiene como energía potencial a

$$U(s) = - \int f(s') ds' . \quad (98)$$

Se conserva la energía

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(s) = E . \quad (99)$$

Esta relación también es una ecuación diferencial, pero es de primer orden y se puede resolver por el método de separación de variables. Si en el instante $t = 0$ la posición es s_0 y la velocidad v_0 la energía total será $E = 1/2mv_0^2 + U(s_0)$. Se puede despejar la velocidad en función de la posición

$$v = \frac{ds}{dt} = \text{sign}(v_0) \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(s))} .$$

Esta fórmula es válida mientras no se llegue a un punto de retorno. El método de separación de variables consiste en reescribir la ecuación poniendo todas las apariciones de una variable (s) de un lado de la ecuación y las de la otra (t) del otro lado,

$$\text{sign}(v_0) \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{ds}{\sqrt{E - U(s)}} = dt .$$

Podemos ahora integrar de un lado respecto a s y del otro respecto a t ,

$$\text{sign}(v_0) \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{s_0}^s \frac{ds'}{\sqrt{E - U(s')}} = t . \quad (100)$$

De esta manera se obtuvo el tiempo t como función de la posición s , $t = \phi(s)$. Para obtener la ley horaria hay que conseguir la función inversa $s(t) = \phi^{-1}(t)$.

Choques

En esta sección estudiaremos los choques entre dos partículas una de masa m_1 y otra de masa m_2 . Supondremos que no haya fuerzas externas a las partículas, pero en el caso de que las hubiera, los resultados serán una buena aproximación si el choque es muy rápido, de manera que impulso de las fuerzas externas sea despreciable. Si las cantidades de movimiento antes del choque son \vec{p}_1 y \vec{p}_2 y después \vec{p}'_1 y \vec{p}'_2 por la conservación de la cantidad de movimiento tenemos

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 .$$

Para las consideraciones energéticas es más conveniente usar el sistema de referencia del centro de masas, en el cual la cantidad de movimiento total es nula,

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = 0 .$$

En el sistema de referencia del CM en todo momento las magnitudes de las cantidades de movimiento de ambas partículas son iguales, $p_1 = p_2$ y $p'_1 = p'_2$.

La energía cinética de una partícula de ímpetu \vec{p} es $E = p^2/(2m)$, por lo que la energía total del sistema antes del choque será

$$E = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_1^2}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)$$

y después del choque

$$E' = \frac{(p'_1)^2}{2m_1} + \frac{(p'_2)^2}{2m_2} = \frac{(p'_1)^2}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) .$$

Usualmente si tenemos dos cuerpos macroscópicos que chocan, por ejemplo imaginemos dos pelotas, se producen deformaciones y fuerzas elásticas asociadas a ellas. Durante el choque parte de la energía cinética se convierte en energía potencial elástica que luego se reconvierte en energía cinética.

En un choque **perfectamente elástico** las energías antes y después del choque son iguales $E' = E$ y por lo tanto $p_1 = p'_1$.

En general hay fuerzas de fricción o también deformaciones irreversibles que hacen que la reconversión de la energía elástica en cinética no sea completa. El choque será sólo parcialmente elástico $E' = \eta E$, donde $0 \leq \eta \leq 1$.

En un choque **totalmente inelástico** la energía final, en el sistema de referencia del centro de masas, es cero, $E' = 0$ y también las cantidades de movimiento $p'_1 = p'_2 = 0$.

En algunos casos uno de los cuerpos puede tener antes del choque algún tipo de energía elástica acumulada, por ejemplo un resorte comprimido, energía potencial que se libera durante la colisión, con el resultado de que la energía cinética final sea mayor que la inicial, $\eta > 1$.

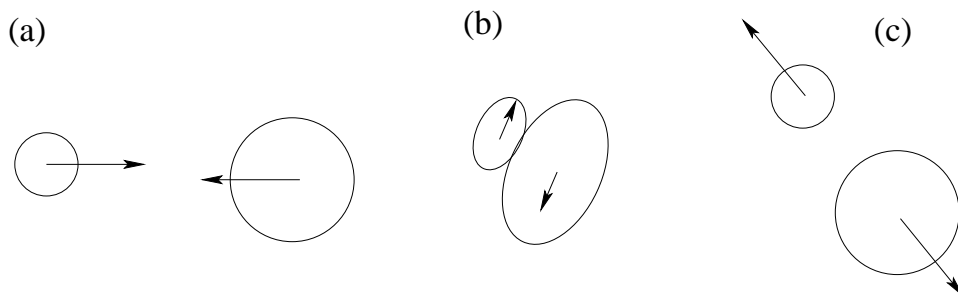


Fig. 5.6 Dos cuerpos en colisión elástica

(a) Antes del choque, (b) durante el choque, (c) después del choque.

Un ejemplo: Rampa con rizo

Estudiamos aquí un ejemplo que ilustra el uso de la conservación de la energía para determinar el movimiento. Consiste en un cuerpo de masa m que se desliza sin roce sobre una rampa de inclinación variable que termina en un rizo de radio R . El cuerpo parte del reposo de la posición A a una altura h del piso.

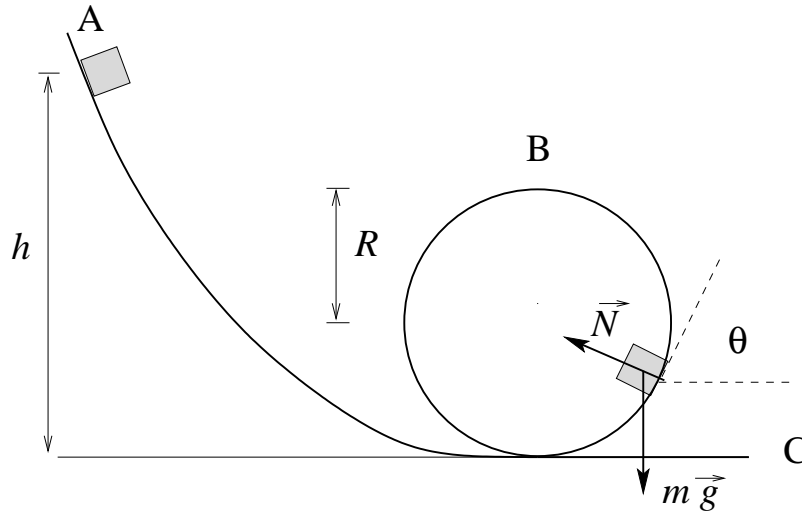


Fig. 5.7 Rampa con rizo de radio R

Las únicas fuerzas que actúan sobre el cuerpo son su peso $m\vec{g}$ y la reacción normal de la rampa \vec{N} . La primera es conservativa y tiene una energía poencial mgz , donde z es la altura medida desde el piso. La segunda no produce trabajo por ser normal a la trayectoria. Es un caso típico en el que se conserva la energía. La velocidad es función de la altura,

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mgz ,$$

$$v^2 = 2g(h - z) .$$

Por ejemplo en el punto C la rapidez es $v = \sqrt{2gh}$. Sin embargo esa no es toda la historia. Como el cuerpo está apoyado sobre la rampa la fuerza normal sólo puede ser repulsiva. En un punto donde la inclinación sea θ y el radio de curvatura R la componente normal de la segunda ley de Newton da

$$\frac{mv^2}{R} = N - mg \cos \theta$$

donde usamos la expresión de la aceleración normal (37).

Como N no puede ser negativa

$$v^2 \geq -Rg \cos \theta .$$

Cuando la inclinación es mayor de 90 grados $\theta > \pi/2$, hay una velocidad mínima para que el cuerpo se mantenga adherido a la rampa. Por ejemplo para que el cuerpo de una vuelta al rizo, o sea que pase por el punto B correspondiente a $\theta = \pi$, no basta que tenga la energía suficiente ($h = 2R$), sino que la rapidez debe ser $v \geq \sqrt{Rg}$, lo que implica que debe ser $h \geq 5/2R$.

Oscilaciones

Oscilador armónico

Los movimientos de tipo oscilatorio son muy comunes en la naturaleza. Por ejemplo, como vimos en el capítulo 5, es oscilatorio el movimiento en una dimensión para energías cercanas a un mínimo relativo de la energía potencial $U(x)$. Tenemos oscilaciones, en columpios, edificios, moléculas, circuitos eléctricos y cualquier cantidad de otros sistemas. Por lo común cuando la amplitud de las oscilaciones es pequeña casi todas las oscilaciones son sinusoidales. Decimos que un oscilador es **armónico** cuando sus oscilaciones son sinusoidales. Otra razón para estudiar los osciladores armónicos es que son un buen ejemplo de sistema con una ecuación de movimiento no trivial, pero que sin embargo podemos resolver sin mucha dificultad.

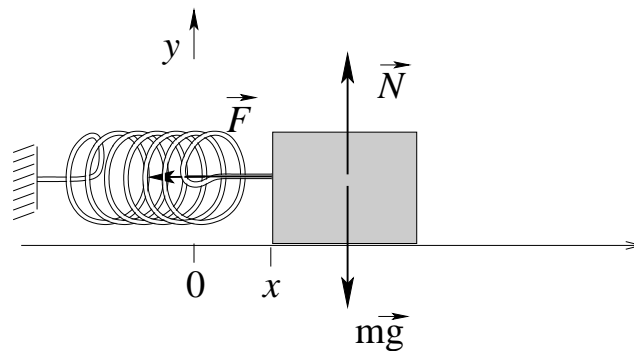


Fig. 6.1 Ejemplo de oscilador armónico

Como ejemplo de oscilador consideraremos un cuerpo de masa m , colocado sobre una superficie horizontal sin fricción y sujeto a un resorte que por el otro extremo está fijo y que tiene una constante elástica k . El cuerpo se mueve a lo largo del eje x que es horizontal. La posición de equilibrio del resorte coincide con el origen de coordenadas.

Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son su peso $m\vec{g}$, la reacción normal de la superficie \vec{N} y la fuerza del resorte $\vec{F} = -kx\hat{i}$. Como el cuerpo está vinculado a moverse horizontalmente el peso y la fuerza normal se anulan mutuamente. La fuerza neta es la sola fuerza del resorte. Por lo tanto la componente x de la segunda ley nos da la siguiente ecuación de movimiento

$$ma_x = -kx$$

equivalente a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x. \quad (101)$$

Este es un ejemplo de ecuación diferencial que no se puede resolver como en el caso de una fuerza dependiente del tiempo. Si integráramos la ecuación respecto al tiempo, del lado izquierdo de la ecuación obtendríamos la velocidad, pero del lado derecho aparecería una

integral de $x(t)$ que no sabemos lo que es. La ecuación pasaría de ser diferencial a ser una ecuación integral.

Sin embargo la ecuación diferencial del oscilador armónico (101) se resuelve fácilmente, ya que es una *ecuación lineal de coeficientes constantes*. Es lineal porque la incógnita aparece en todos los términos en primer grado. Por eso tiene la siguiente propiedad: si $f(t)$ y $g(t)$ son soluciones también lo es cualquier combinación lineal $af(t) + bg(t)$. Una ecuación de segundo orden, o sea en la que aparece una derivada segunda, tiene dos constantes de integración, que en el caso de la segunda ley se pueden relacionar con la posición y velocidad iniciales $x(0)$ y $v(0)$. Si conociéramos dos soluciones independientes, la solución general sería la combinación lineal y las constantes de integración serían a y b .

En las ecuaciones lineales de coeficientes constantes la derivada de más alto orden aparece como combinación lineal de las derivadas de menor orden. ¿Qué funciones conocemos que sean sus propias derivadas?. Ante todo e^x , pero también $\cos x$ y $\sin x$, que son las opuestas de sus propias derivadas segundas. La receta es: pruebe soluciones del tipo $\exp(\alpha t)$, $\cos(\omega t)$, $\sin(\omega t)$, $\exp(\alpha t) \cos(\omega t)$ o $\exp(\alpha t) \sin(\omega t)$. Introduzca la función de prueba en la ecuación y determine los parámetros para que se satisfaga la ecuación. Siendo $\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$ basta probar las funciones con el seno. La solución con el coseno será automáticamente satisfecha con los mismos parámetros.

Apliquemos la receta a nuestro caso. La derivada segunda es igual a una constante negativa por la función. Lo que debemos probar es $x = \sin(\omega t)$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \omega \cos(\omega t) = -\omega^2 \sin(\omega t) .$$

Para que la ecuación se satisfaga basta poner

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} . \tag{102}$$

El período de la oscilación es $T = 2\pi/\omega$.

La solución general es de la forma

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) . \tag{103}$$

Las constantes A y B se obtienen de las condiciones iniciales $x_0 = x(0)$ y $v_0 = v(0)$.

$$x_0 = x(0) = A \cos(0) + B \sin(0) = A \tag{104}$$

y

$$v(t) = -A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t)$$

de donde

$$v_0 = v(0) = B\omega \tag{105}$$

la solución es entonces

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + v_0 \omega^{-1} \sin(\omega t) .$$

La solución encontrada es cómoda por su relación con las condiciones iniciales, pero no con respecto a la descripción del movimiento. Como la combinación lineal de dos sinusoides es también un senoide la solución también se puede escribir como

$$x(t) = C \sin(\omega t + \varphi) = C \cos(\varphi) \sin(\omega t) + C \sin(\varphi) \cos(\omega t) \tag{106}$$

y por lo tanto

$$A = C \sin(\varphi) \quad \text{y} \quad B = C \cos(\varphi) . \quad (107)$$

La constante C es la amplitud de la oscilación y φ es el desfase. Las relaciones se pueden invertir

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \text{y} \quad \tan(\varphi) = \frac{A}{B} . \quad (108)$$

La velocidad del oscilador resulta

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = C\omega \cos(\omega t + \varphi) .$$

La velocidad oscila con un desfase de 90° respecto a la elongación x y una amplitud

$$v_m = C\omega . \quad (109)$$

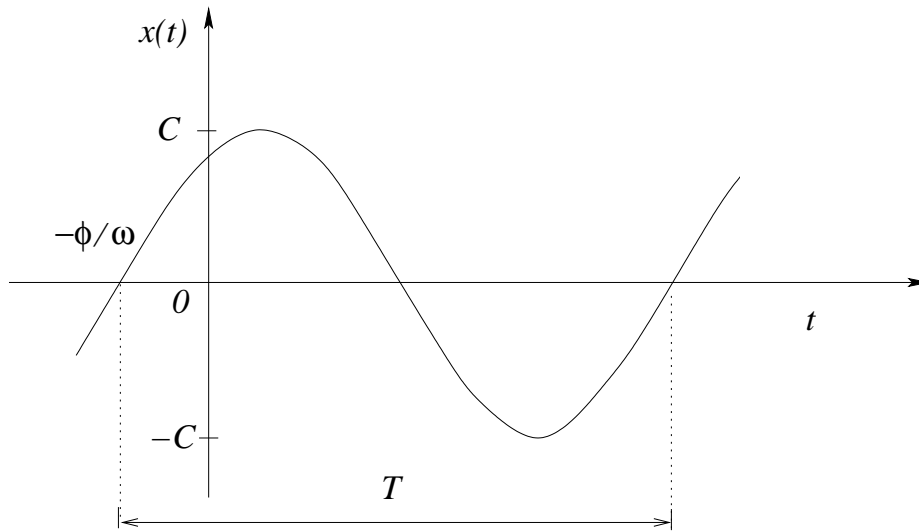


Fig. 6.2 Ley horaria armónica

Energía del oscilador armónico

Calcularemos ahora la energía del oscilador y verificaremos que se conserva.

La energía cinética es

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 C^2 \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}kC^2 \cos^2(\omega t + \varphi) ,$$

la energía potencial

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kC^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

y la energía mecánica total

$$E = K + U = \frac{1}{2}kC^2 (\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi)) = \frac{1}{2}kC^2 = \frac{1}{2}mv_m^2 . \quad (110)$$

Solución de la ecuación usando conservación de la energía

El oscilador armónico es un buen ejemplo para resolver la ecuación del movimiento usando la conservación de la energía. Para simplificar pongamos que la posición inicial es el punto de equilibrio, $x = 0$. La energía será $E = 1/2mv_0^2$. Usando la ecuación (100) el tiempo como función de la posición resulta

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{m/2} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{E - kx^2/2}} \\ &= \sqrt{m/(2E)} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - kx^2/(2E)}} \\ &= \sqrt{m/(2E)} \sqrt{2E/k} \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} \\ &= \sqrt{m/k} \sin^{-1}(\sqrt{k/(2E)}x) . \end{aligned}$$

Invirtiendo obtenemos

$$x(t) = \sqrt{2E/k} \sin(\sqrt{k/m} t)$$

que efectivamente corresponde a una amplitud $C = \sqrt{2E/k}$ y a una frecuencia angular $\omega = \sqrt{k/m}$.

Oscilaciones pequeñas

Una partícula que se mueva en una dimensión presenta movimientos oscilatorios alrededor de los puntos de equilibrio estable. Si el mínimo relativo en x_0 es cuadrático

$$U(x) \approx U_0 + \frac{1}{2}U''(x_0)(x - x_0)^2$$

las oscilaciones pequeñas son aproximadamente armónicas. La fuerza es

$$F = -U'(x) \approx -U''(x_0)(x - x_0) \tag{111}$$

que corresponde a una constante de resorte equivalente $k = U''(x_0)$. La frecuencia angular resulta $\omega = \sqrt{U''(x_0)/m}$.

Péndulo simple: ecuación del movimiento

Un sistema que presenta oscilaciones pequeñas armónicas es el péndulo simple. Una partícula de masa m está guindada de un punto C por medio de una cuerda ideal de longitud l . Consideraremos movimientos en los que la partícula se mantiene en un plano vertical. El movimiento es circular con radio l .

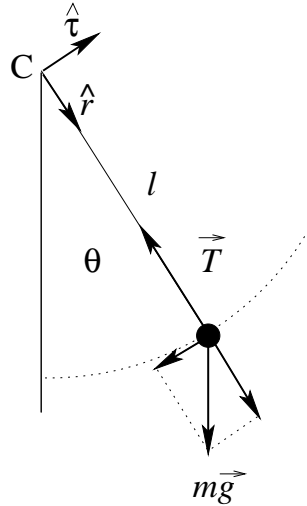


Fig. 6.3 Péndulo simple

Las únicas fuerzas que actúan sobre la partícula son el peso $m\vec{g}$ y la tensión de la cuerda \vec{T} . Conviene descomponer el movimiento entre la dirección radial \hat{r} y la tangencial $\hat{\tau}$. El arco s depende del ángulo θ que hace el péndulo con la vertical según la relación $s = l\theta$. Tenemos

$$\vec{g} = \cos \theta g \hat{r} - \sin \theta g \hat{\tau}$$

$$\vec{T} = -T \hat{r}$$

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \hat{\tau}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2 s}{dt^2} \hat{\tau} - \frac{v^2}{l} \hat{r} .$$

La ecuación del movimiento

$$m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g}$$

obtenemos las ecuaciones normal y tangencial

$$-m \frac{v^2}{l} = -T + mg \cos \theta \quad (112)$$

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \sin \theta . \quad (113)$$

La ecuación normal permite calcular la tensión de la cuerda. Como una cuerda solo puede halar la partícula, no empujarla, para ángulos mayores que $\pi/2$ en los que el coseno es negativo hay una velocidad mínima posible, por lo que la amplitud de la oscilación del ángulo no puede ser mayor de $\pi/2$ porque la partícula se saldría de la trayectoria circular.

$$T = m \frac{v^2}{l} + mg \cos \theta \geq 0 . \quad (114)$$

La ecuación tangencial determina el movimiento

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -g \sin(s/l) . \quad (115)$$

No es la ecuación del oscilador armónico, ni siquiera es una ecuación lineal porque la incógnita s aparece dentro de un seno. Sin embargo si los ángulos son pequeños, $|\theta| \ll 1$, el seno tiende al ángulo, $\sin \theta \approx \theta$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} \approx -\frac{g}{l} s$$

y el movimiento es aproximadamente armónico con frecuencia angular $\omega = \sqrt{g/l}$. Galileo encontró experimentalmente que el período era independiente de la amplitud y que crecía como la raíz de la longitud l . En realidad el período aumenta algo para amplitudes grandes, como se trata en la siguiente sección.

Péndulo simple: energía

En el péndulo simple la tensión \vec{T} de la cuerda no produce trabajo por ser perpendicular a la trayectoria circular. La otra fuerza que actúa sobre la partícula, el peso, es conservativa. Se puede entonces resolver el problema usando la conservación de la energía. La energía potencial gravitatoria, poniendo el cero en el punto C es

$$U(\theta) = -mgl \cos \theta \quad (116)$$

y la energía total resulta

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - mgl \cos \theta . \quad (117)$$

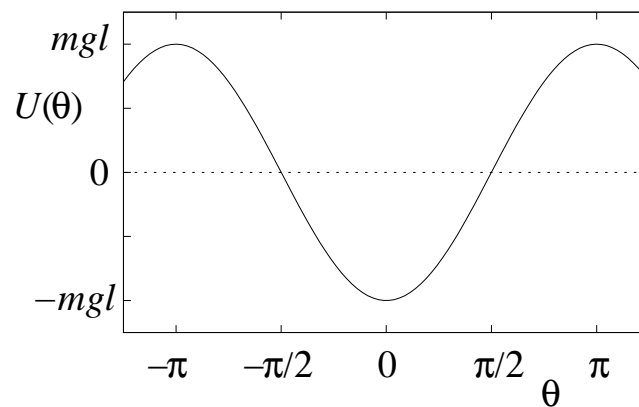


Fig. 6.4 Energía potencial del péndulo simple

Si el péndulo se fabrica con una barra rígida sin peso, en vez de una cuerda, no existe la limitación (114) en el signo de T . Del estudio del gráfico de la energía potencial se determina que hay un punto de equilibrio estable en $\theta = 0$, $E = -mgl$ y uno de equilibrio inestable

Capítulo 6: Oscilaciones

en $\theta = \pm\pi$, $E = mgl$. Para energías $-mgl < E < mgl$ el movimiento es oscilatorio, para $mgl < E$ el péndulo no oscila sino que da vueltas: el ángulo crece o decrece indefinidamente.

La amplitud de oscilación del ángulo se obtiene poniendo $v = 0$ en la ecuación (117),

$$\begin{aligned}\cos\theta_0 &= -\frac{E}{mgl}, \\ \theta_0 &= \cos^{-1}(-E/mgl).\end{aligned}\tag{118}$$

En el caso de la cuerda la condición (114) implica que hay un ángulo máximo θ_m por debajo del cual la partícula se mantiene en la trayectoria circular. Para ángulos mayores el movimiento es de caída libre. La condición se puede escribir en función de la energía. Se usa la ecuación (117) para substituir mv^2 ,

$$\cos\theta \geq -\frac{2E}{3mgl}$$

y

$$\theta_m = \cos^{-1}(-2E/3mgl).$$

Para $E < 0$ resulta $\theta_0 < \theta_m$ por lo que nunca la partícula se sale de su trayectoria circular, pero para $E > 0$ la desigualdad se invierte $\theta_0 > \theta_m$ y la partícula abandona la trayectoria circular antes de llegar a su amplitud. Si $E > 3mgl/2$ el péndulo da vueltas, aún en el caso de la cuerda.

El movimiento exacto se obtiene integrando la ecuación de la energía. Para simplificar consideremos que inicialmente $t = 0$ la partícula se encuentre en $\theta = -\theta_0$ con velocidad cero. La energía es $E = -mgl \cos\theta_0$ y

$$v = \sqrt{2gl} \sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}.$$

En estas condiciones el péndulo inicia a moverse con velocidad angular positiva $d\theta/dt = v/l$ por lo que obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}$$

válida para $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$ y que se puede solucionar con el método de la separación de variables

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} dt$$

integrando obtenemos t como función θ ,

$$\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{-\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = t.$$

En particular podemos calcular el período de la oscilación en función de la amplitud

$$T = \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}.$$

Oscilador con fricción fluida

Si dejamos oscilar un péndulo por mucho tiempo, lentamente irá disminuyendo la amplitud de la oscilación debido al roce con el aire. Es un ejemplo de oscilador con fricción fluida. Consideremos el oscilador del resorte de la figura 6.1 y supongamos que haya un término de fricción proporcional a la velocidad

$$\vec{F}_f = -\gamma\vec{v}.$$

La ecuación del movimiento en el eje x ahora será

$$ma_x = -kx - \gamma v_x$$

equivalente a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2x - \alpha \frac{dx}{dt} \quad (119)$$

con

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{y} \quad \alpha = \frac{\gamma}{m}.$$

El parámetro ω_0 es la frecuencia angular que tendría el oscilador si no hubiese fricción. El parámetro α también tiene dimensiones de t^{-1} y mide la amortiguación. Hay dos casos límite, cuando $\omega_0 \gg \alpha$ domina el resorte y el movimiento es oscilatorio con una pequeña amortiguación. En el otro extremo cuando $\omega \ll \alpha$ domina la fricción y la velocidad decae exponencialmente y luego lentamente el móvil se acerca al punto de equilibrio arrastrado por el resorte. Este régimen se llama de oscilador sobreamortiguado.

Movimiento sobreamortiguado

Estudiemos primero el caso sobreamortiguado. La ecuación sigue siendo del tipo lineal con coeficientes constantes. Podemos probar en la ecuación una solución de tipo decaimiento exponencial, $x = e^{-\beta t}$,

$$\beta^2 e^{-\beta t} = -\omega_0^2 e^{-\beta t} + \alpha \beta e^{-\beta t}$$

Obtenemos la condición

$$\beta^2 - \alpha\beta + \omega_0^2 = 0$$

que es una ecuación de segundo grado en β . Resolviendo obtenemos dos soluciones

$$\beta_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\omega_0^2}) \quad (120)$$

y

$$\beta_2 = \frac{1}{2}(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\omega_0^2}) \quad (121)$$

Para que haya soluciones reales debe ser $2\omega_0 \leq \alpha$. Ambas soluciones son positivas

$$\frac{\omega_0^2}{\alpha} \leq \beta_2 \leq \beta_1 \leq \alpha.$$

La solución general es del tipo

$$x(t) = Ae^{-\beta_1 t} + Be^{-\beta_2 t} \quad (122)$$

donde las constantes de integración se obtienen de la posición y velocidad iniciales con:

$$x(0) = A + B, \quad v(0) = -\beta_1 A - \beta_2 B.$$

El exponencial rápido (β_1) predomina cuando la velocidad es grande y la fuerza dominante es la fricción; la rapidez disminuye rápidamente. El exponencial lento (β_2) predomina cuando la fricción y la fuerza del resorte están más o menos equilibradas y el cuerpo se mueve hacia la posición de equilibrio.

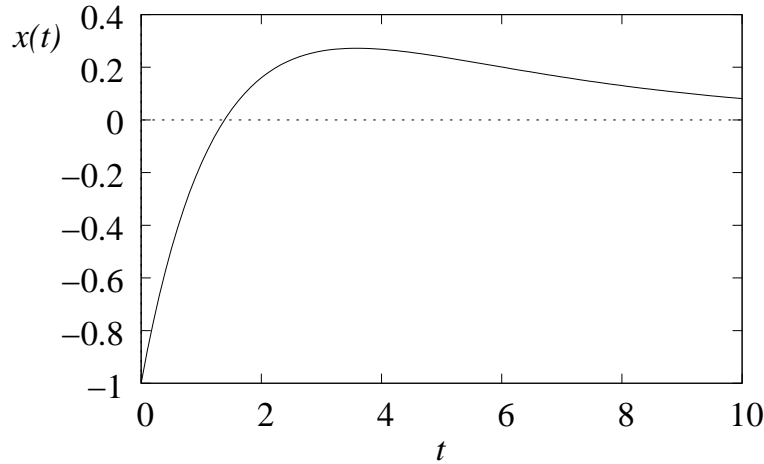


Fig. 6.5 Movimiento sobreamortiguado

Movimiento sobreamortiguado correspondiente a $\omega_0 = \sqrt{3}\alpha/4$, $\beta_1 = 3\alpha/4$ y $\beta_2 = \alpha/4$. Para el gráfico se usó $\alpha = 1$, $A = -2$ y $B = 1$.

Movimiento oscilatorio amortiguado

Cuando la condición para que haya movimiento sobreamortiguado no se cumple, esto es cuando $2\omega_0 > \alpha$ el movimiento es oscilatorio amortiguado. Podemos probar una función del tipo

$$x(t) = \exp(-\beta t) \sin(\omega t).$$

La velocidad y la aceleración son

$$v(t) = -\beta \exp(-\beta t) \sin(\omega t) + \omega \exp(-\beta t) \cos(\omega t)$$

$$a(t) = \beta^2 \exp(-\beta t) \sin(\omega t) - 2\beta\omega \exp(-\beta t) \cos(\omega t) - \omega^2 \exp(-\beta t) \sin(\omega t).$$

Substituyendo en la ecuación,

$$\exp(-\beta t)[(\beta^2 - \omega^2) \sin(\omega t) - 2\beta\omega \cos(\omega t)] = \exp(-\beta t)[- \omega_0^2 \sin(\omega t) + \alpha\beta \sin(\omega t) - \alpha\omega \cos(\omega t)]$$

$$(\beta^2 - \omega^2 + \omega_0^2 - \alpha\beta) \sin(\omega t) + (\alpha\omega - 2\beta\omega) \cos(\omega t) = 0$$

Como el coseno y el seno son independientes los factores que los multiplican deben anularse

$$\beta^2 - \omega^2 + \omega_0^2 - \alpha\beta = 0$$

y

$$\alpha\omega - 2\beta\omega = 0 .$$

Las solución para los parámetros es

$$\beta = \alpha/2 \quad \text{y} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2/4} . \quad (123)$$

La solución general de la ecuación es

$$x(t) = e^{-\beta t} [A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)] \quad (124)$$

con las condiciones iniciales

$$x(0) = B , \quad \text{y} \quad v(0) = -\beta B + \omega A .$$

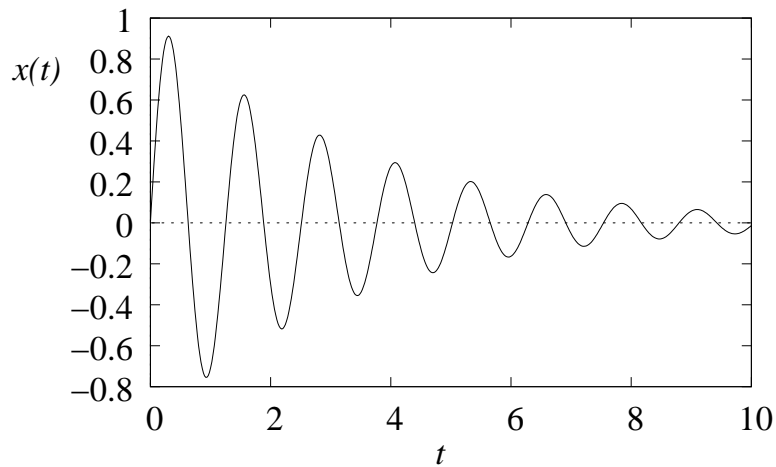


Fig. 6.6 Movimiento oscilatorio amortiguado

Para el gráfico se usó $\beta = 0,3$, $\omega = 5$ $A = 1$ y $B = 0$.

Energía del oscilador amortiguado

La energía mecánica total del oscilador es la suma de la energía cinética más la energía elástica,

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 .$$

En el caso del oscilador con fricción la energía no se conserva sino que disminuye continuamente, como podemos comprobar calculando la derivada temporal de la energía

$$\frac{dE}{dt} = mv \frac{dv}{dt} + kx \frac{dx}{dt} = (F + kx)v = -\gamma v^2 \leq 0$$

que naturalmente coincide con la potencia de la fuerza de fricción.

Torque, Momento Angular y Fuerzas Centrales

Torque

Consideremos una partícula que se encuentre en un punto P , una fuerza \vec{F} que actúe sobre la partícula y otro punto C , se define **momento de la fuerza, momento de torsión, torque, par*** o simplemente **momento** respecto al centro C al producto vectorial del desplazamiento \vec{CP} por la fuerza \vec{F}

$$\vec{\tau} = \vec{CP} \times \vec{F}. \quad (125)$$

El torque es un vector axial. La unidad de medida es homogénea con la del trabajo pero se prefiere no usar la unidad de trabajo sino directamente *fuerza × longitud* ($\text{N} \cdot \text{m}$ en el sistema internacional). El torque es perpendicular al desplazamiento y a la fuerza. Como se puede ver en la figura 7.1 la magnitud del torque es igual al producto de la fuerza F por su brazo b , siendo este último la distancia entre la línea de acción de la fuerza y el centro C . La magnitud también es igual al producto de la distancia \overline{CP} por la componente perpendicular de la fuerza F_{\perp}

$$\tau = F \overline{CP} \sin \theta = bF = F_{\perp} \overline{CP}. \quad (126)$$

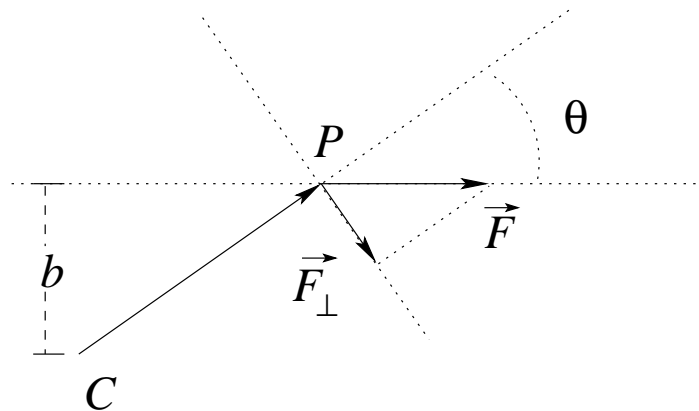


Fig. 7.1 Torque de una fuerza

* Esta denominación, popular en España, proviene de *momento de un par de fuerzas*, siendo este un conjunto de dos fuerzas opuestas aplicadas en dos puntos diferentes de un cuerpo rígido. El nombre *torque* tiene la ventaja de ser una sola palabra y de no designar ninguna otra cosa.

Torque y la 3ª ley de Newton

Consideremos dos partículas A y B , localizadas en sendos puntos con el mismo nombre. Sea \vec{F}_{AB} la fuerza sobre A debida a B y \vec{F}_{BA} su reacción. Sean $\vec{\tau}_{AB}$ y $\vec{\tau}_{BA}$ los correspondientes torques respecto a un centro C . La suma de los dos torques se anula

$$\vec{\tau}_{AB} + \vec{\tau}_{BA} = \vec{CA} \times \vec{F}_{AB} + \vec{CB} \times \vec{F}_{BA} = (\vec{CA} - \vec{CB}) \times \vec{F}_{AB} = \vec{BA} \times \vec{F}_{AB} = 0. \quad (127)$$

Para obtener este resultado hemos utilizado el hecho de que por la 3ª ley de Newton la acción y la reacción son opuestas y paralelas a \vec{AB} . En resumen la 3ª ley de Newton se puede expresar diciendo que las fuerzas de acción y reacción son opuestas y sus correspondientes torques también.

Momento angular

Se define **momento de la cantidad de movimiento, cantidad de movimiento angular, ímpetu angular, momento cinético o momento angular** de una partícula localizada en un punto P con respecto a un centro C al producto vectorial del desplazamiento \vec{CP} por la cantidad de movimiento $\vec{p} = m\vec{v}$

$$\vec{l} = \vec{CP} \times \vec{p}. \quad (128)$$

Análogamente al caso del torque la magnitud del momento angular es igual al producto del brazo por p o al producto de la distancia \overline{CP} por p_{\perp}

$$l = p \overline{CP} \sin \theta = bp = p_{\perp} \overline{CP}. \quad (129)$$

Cuando el centro C es fijo el momento angular l es proporcional a la velocidad **areal**, o sea con el área por unidad de tiempo barrida por el radio-vector \vec{CP} a medida que la partícula se mueve. Recordando que el módulo del producto vectorial de dos vectores es igual al área del paralelogramo formado por ellos, podemos determinar el área barrida dA en un intervalo de tiempo dt (ver fig. 7.2),

$$dA = \frac{1}{2} |\vec{CP} \times \vec{v} dt| = \frac{1}{2m} |\vec{CP} \times \vec{p}| dt = \frac{l}{2m} dt;$$

De aquí

$$\frac{dA}{dt} = \frac{l}{2m}. \quad (130)$$

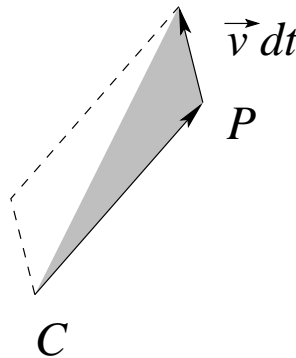


Fig. 7.2 Área barrida

Teorema del torque

El teorema del torque es el análogo en rotación de la 2ª ley de Newton. La derivada temporal de la cantidad de movimiento angular está relacionada con el torque de la fuerza neta

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d\vec{CP}}{dt} \times \vec{p} + \vec{CP} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = (\vec{v} - \vec{v}_C) \times \vec{p} + \vec{\tau} = -\vec{v}_C \times \vec{p} + \vec{\tau}. \quad (131)$$

En muchos casos el centro C es un punto fijo y el primer término de la ecuación desaparece, pero también hay casos interesantes en los que el centro C se mueve.

Cuando la partícula está vinculada a moverse en una esfera (o circunferencia), por ejemplo un péndulo, la fuerza del vínculo, que típicamente depende de la velocidad, es radial. Si escogemos como centro para el torque el centro de la esfera dicha fuerza no contribuye al torque y por lo tanto el movimiento está determinado por la ecuación (131).

Movimiento plano en coordenadas polares

En una situación en la que haya un punto característico de la fuerza es natural usar coordenadas polares centradas en el punto. Las coordenadas polares de un punto $P \equiv (x, y, 0)$ del plano xy son la distancia $r = |\vec{OP}|$ entre el punto y el origen y el ángulo θ entre \vec{OP} y el eje x . Las coordenadas cartesianas de la partícula se obtienen de las polares con

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (132)$$

mientras que las relaciones inversas son

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1}(y/x) \end{cases} \quad (133)$$

Conviene introducir el versor radial

$$\hat{r} = \hat{u}_r = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \quad (134)$$

y el versor transversal

$$\hat{\theta} = \hat{u}_\theta = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j} \quad (135)$$

que son funciones de θ y perpendiculares entre sí. Entre los versores valen las siguientes relaciones

$$\begin{cases} \hat{r} \cdot \hat{\theta} = 0 \\ \hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{k} \\ \frac{d\hat{r}}{d\theta} = \hat{k} \times \hat{r} = \hat{\theta} \\ \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = \hat{k} \times \hat{\theta} = -\hat{r} \end{cases} \quad (136)$$

Siendo la posición de la partícula $\vec{OP} = \vec{r} = r\hat{r}$ la velocidad resulta

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}. \quad (137)$$

Como vemos la velocidad tiene dos componentes perpendiculares, la velocidad **radial**

$$v_r = \vec{v} \cdot \hat{r} = \frac{dr}{dt} \quad (138)$$

y la velocidad **transversal**

$$v_\theta = \vec{v} \cdot \hat{\theta} = r \frac{d\theta}{dt} . \quad (139)$$

El momento angular \vec{l} depende sólo de la velocidad transversal,

$$\vec{l} = m\vec{r} \times \vec{v} = mr^2 \frac{d\theta}{dt} \hat{k} \quad (140)$$

y tiene la dirección z . El signo de la componente z es positivo si la rotación alrededor del origen es antihoraria.

La aceleración se obtiene derivando la velocidad en (137). El resultado es un poco más complicado

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d^2r}{dt^2} \hat{r} + \frac{dr}{dt} \frac{d\hat{r}}{dt} + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \hat{\theta} + r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\hat{\theta}}{dt} \\ &= \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \hat{r} + \left(2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) \hat{\theta} . \end{aligned} \quad (141)$$

Nótese que las componentes radial y transversal de \vec{a} *no* son las derivadas de las correspondientes componentes de la velocidad,

$$a_r = \vec{a} \cdot \hat{r} = \frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad (142)$$

y

$$a_\theta = \vec{a} \cdot \hat{\theta} = 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} = r^{-1} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) . \quad (143)$$

Esto es debido a que los versores \hat{r} y $\hat{\theta}$ son dependientes del tiempo. La componente radial contiene un término centrípeto y la componente transversal está relacionada con la derivada del producto rv_θ .

Para determinar el movimiento necesitamos conocer la fuerza \vec{F} que actúa sobre la partícula. Como estamos suponiendo que el movimiento es plano, la fuerza debe estar en el plano xy y se podrá descomponer en las direcciones radial y transversal

$$\vec{F} = F_r \hat{r} + F_\theta \hat{\theta} . \quad (144)$$

Como el momento angular el torque de la fuerza

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = rF_\theta \hat{k}$$

también apunta en la dirección z .

La ecuación del movimiento es naturalmente la 2ª ley de Newton (48), que podemos descomponer en las direcciones radial y transversal. La componente transversal es idéntica a la ecuación del torque,

$$m \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = rF_\theta \quad (145)$$

mientras que la ecuación radial la podemos escribir como

$$m \frac{d^2r}{dt^2} = F_r + mr \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 , \quad (146)$$

donde al segundo término del lado derecho se le da el nombre de **fuerza centrífuga**.

Un ejemplo: el péndulo simple

Podemos encontrar la ecuación del péndulo que estudiamos en el capítulo 6 usando el teorema del torque. Para esto escojamos un sistema de coordenadas con el origen en el punto del que cuelga el péndulo y el eje x dirigido verticalmente hacia abajo. El torque de la fuerza total será

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times (\vec{T} + mg\hat{i}) = -mgr \sin \theta \hat{k}$$

y la ecuación del torque, tomando en cuenta (140) y que r es constante e igual a la longitud de la cuerda, resulta

$$mr^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} \hat{k} = -mgr \sin \theta \hat{k}$$

de donde

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{r} \sin \theta$$

que es equivalente a la ecuación (115).

Movimiento en una fuerza central

Se dice **central** una fuerza cuya magnitud dependa de la distancia entre la partícula y un centro C y cuya dirección sea radial. Si \vec{r} es el radio-vector que va de C a la partícula tenemos

$$\vec{F} = f(r)\hat{r} .$$

Como ya se vio en el capítulo 5 una fuerza de este tipo es conservativa y su energía potencial $U(r)$ es la primitiva de $-f(r)$

$$f(r) = -\frac{dU}{dr} .$$

La otra característica de una fuerza central es que el torque respecto al centro es nulo

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times f(r)\hat{r} = 0 .$$

Por lo tanto en el movimiento de una partícula, cuya fuerza neta sea central se conserva, no solamente la energía mecánica E , sino también el momento angular \vec{l} . Estas dos condiciones restringen tanto el movimiento que en definitiva este resulta equivalente a un movimiento en una dimensión.

Como sea \vec{r} que \vec{v} son perpendiculares a \vec{l} la conservación de este último implica que la trayectoria se mantiene en el plano perpendicular a \vec{l} que contiene el centro C . Podemos siempre suponer que sea el plano xy . El movimiento radial $r(t)$ determina la evolución del ángulo θ . Integrando la expresión (140) se obtiene

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{l_z}{m} \int_0^t r^{-2}(t) dt . \quad (147)$$

Por otra parte la conservación del momento angular también permite eliminar la variable θ de la ecuación de la energía. En efecto la energía cinética es

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_\theta^2) = \frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{l^2}{2mr^2} .$$

El segundo término, que es la energía cinética transversal, es una función del radio r y se comporta como una energía potencial centrífuga. Conviene definir una energía potencial efectiva sumándosele a la verdadera energía potencial $U(r)$

$$U_{\text{ef}}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2mr^2} . \quad (148)$$

La ecuación de conservación de la energía queda como

$$\frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + U_{\text{ef}}(r) = E \quad (149)$$

que es semejante a la ecuación de una partícula en una dimensión. Esto es, el movimiento radial está desacoplado del movimiento transversal.

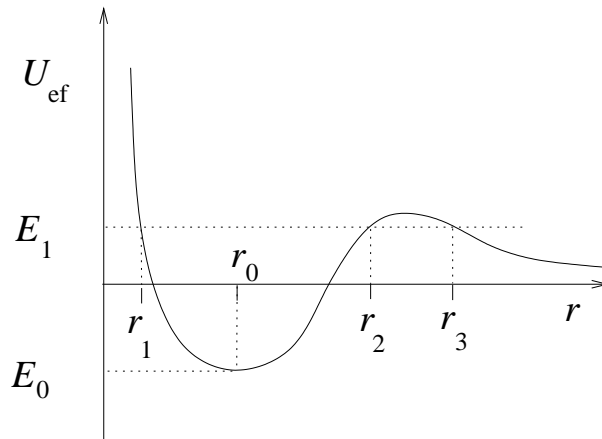


Fig. 7.3 Ejemplo de U_{ef} vs. r

Se puede obtener mucha información cualitativa sobre el movimiento simplemente estudiando la función $U_{\text{ef}}(r)$. En la figura 7.3 vemos un ejemplo de energía potencial efectiva. Si la partícula tiene energía E_0 , que corresponde al mínimo, el radio r se mantiene igual a r_0 , o sea la trayectoria es circular. Los radios de las órbitas circulares correspondientes a una cantidad de movimiento angular l se obtienen resolviendo la ecuación

$$U'_{\text{ef}}(r) = 0 .$$

Si la energía es E_1 hay dos tipos de órbitas disjuntas. Unas corresponden a órbitas acotadas en las que el radio oscila entre un valor mínimo r_1 y uno máximo r_2 . Las otras son órbitas extendidas en las que la partícula proviene desde el infinito acercándose hasta el radio mínimo r_3 y alejándose luego indefinidamente. Los puntos de retorno, en los que la energía cinética radial se anula, son las soluciones de la ecuación

$$U_{\text{ef}}(r) = E .$$

El movimiento radial se puede calcular a partir de la ecuación de la energía (149) o bien de la componente radial de la 2ª ley de Newton (146).

Las órbitas acotadas pueden cerradas o abiertas. Son cerradas cuando el período T de la oscilación del radio es conmensurable con el tiempo que tarda la partícula en dar una vuelta alrededor del centro de la fuerza, más precisamente debe cumplirse

$$\frac{l_z}{m} \int_0^T r^{-2}(t) dt = 2\pi q$$

donde q es un número racional, $q \in \mathbb{Q}$.

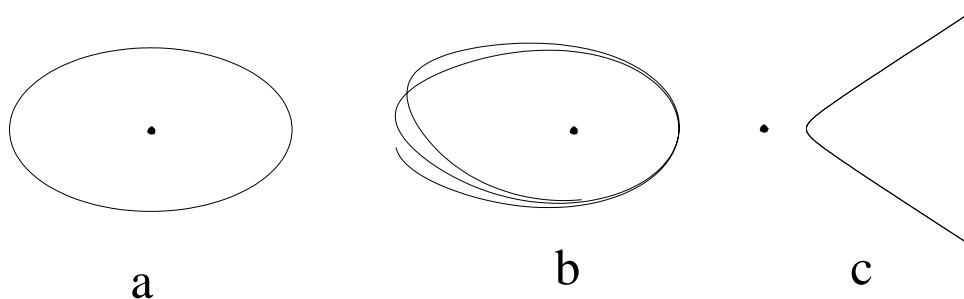


Fig. 7.4 Tipos de órbita

a) órbita cerrada, b) órbita acotada abierta, c) órbita extendida.

Movimiento planetario. Leyes de Kepler

El movimiento de los planetas y en general de los otros objetos del sistema solar es un buen ejemplo de movimiento en una fuerza central. Las posiciones de los planetas conocidos entonces (hasta Saturno) fueron medidas por muchos años y con gran precisión por el astrónomo danés Tycho Brahe (1546–1601) y por su discípulo el alemán Johannes Kepler (1571–1630). Con esos datos Kepler pudo determinar las tres leyes del movimiento de los planetas. Las leyes de Kepler fueron muy importantes en el trabajo posterior de Newton, por una parte le permitieron deducir la existencia de la Gravitación Universal y por otra al demostrar que eran una consecuencia de la Gravitación Universal y de sus tres leyes de la mecánica, se convirtieron en la mejor prueba de la validez de su teoría. A pesar de que algo de esto ya lo tratamos en el capítulo 4, haremos en este aparte un tratamiento exhaustivo del tema.

Las primeras dos leyes de Kepler datan de 1609 y la tercera es de 1618. Como todo el mundo Kepler creía que las órbitas de los planetas eran circulares, y el movimiento uniforme. Debían serlo porque el círculo era la figura perfecta. Sin embargo el ajuste de los datos, en particular los de Marte, daba un error pequeño pero decididamente mayor que la precisión de las mediciones. Kepler se convenció de que debía probar otro tipo de curva. Encontró que una elipse ajustaba perfectamente.

Primera ley de Kepler. *Las órbitas de los planetas son elipses con el centro del Sol en uno de sus dos focos.*

Kepler notó que el movimiento no era uniforme. Cuando el planeta estaba más lejos del Sol iba más lento. Finalmente logró establecer la siguiente ley.

Segunda ley de Kepler. *En el movimiento de un planeta en su órbita el radio que va del centro del Sol al planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.*

Kepler estaba convencido de que debía haber una relación entre el orden del planeta y su período de translación en la órbita. No encontró esa relación pero encontró una entre el período T y el semi-eje mayor de la órbita a . El semi-eje mayor es la media aritmética entre la mínima distancia planeta-Sol (perihelio) y la máxima (afelio).

Tercera ley de Kepler. Los cuadrados de los períodos de los planetas son proporcionales a los cubos de los semi-ejes mayores de las órbitas.

Esto es

$$\frac{T^2}{a^3} = K$$

donde K es una constante igual para todos los planetas.

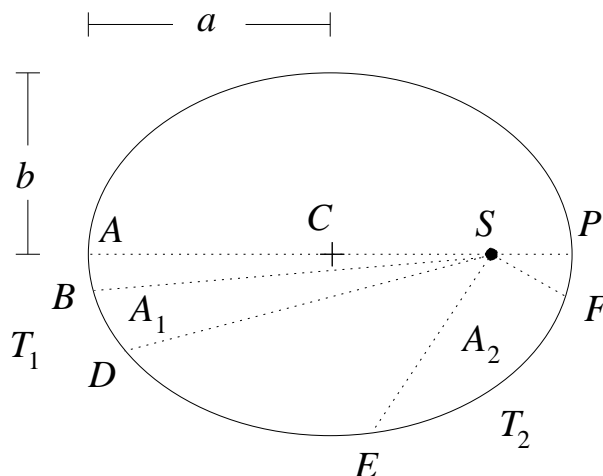


Fig. 7.5 Órbita de un planeta

S Sol, C centro de la órbita, a semi-eje mayor, b semi-eje menor, P perihelio, A afelio. Por la segunda ley de Kepler el tiempo T_1 que tarda en recorrer el arco \widehat{BD} es igual al tiempo T_2 que tarda el planeta en recorrer el arco \widehat{EF} porque las correspondientes áreas barridas A_1 y A_2 son iguales.

Newton estaba convencido de que los cuerpos celestes, como cualquier otro cuerpo, seguían las leyes de la mecánica. Si los planetas giraban alrededor del Sol era porque había una fuerza de atracción entre el Sol y los planetas. Por la 3ª ley de Newton la atracción es mutua. Si algo es evidente a simple vista en el sistema solar es que el Sol es mucho más grande que los planetas. Es de suponer que su masa sea también mucho más grande que la de los planetas, y que por lo tanto el movimiento del Sol debido a la atracción ejercida por los planetas debía ser insignificante. Podemos suponer que el Sol se encuentre en reposo en el centro del sistema solar. Los planetas se mueven en sus órbitas independientemente de la posición de los otros planetas. Se deduce que las fuerzas entre planetas deben ser mucho más pequeñas que la atracción del Sol.

De las tres leyes de Kepler la que se entiende más fácilmente es la segunda. Significa que la velocidad areal es constante, o sea que el momento angular del planeta se conserva. Esto implica que el torque de la fuerza debe ser cero y en consecuencia que la fuerza es radial, lo que a su vez es una consecuencia de la 3ª ley de Newton. Si suponemos que el espacio sea isótropo, o sea que todas las direcciones sean equivalentes, llegamos a la conclusión de que la fuerza es **central**.

Tercera ley de Kepler y Gravitación Universal

Una relación como la tercera ley de Kepler es una peculiaridad de la fuerza, por eso permite determinar las características de la fuerza planeta-Sol.

Lo primero que notamos en la tercera ley es que hay una característica del movimiento que es la misma para todos los planetas, esto implica que *el movimiento de un planeta es independiente de su masa*. Por otra parte en la segunda ley de Newton, $m\vec{a} = \vec{F}$, que determina el movimiento de los cuerpos, aparece la masa. La única forma de que el movimiento no dependa de la masa es que la fuerza sea a su vez proporcional a la masa del planeta, de manera que esta se elimine en la ecuación.

A este punto Newton hizo uno de sus mayores descubrimientos. Los planetas no son los únicos cuerpos sometidos a fuerzas en el sistema solar. La Luna gira alrededor de la Tierra; otros planetas, como Júpiter, también tienen satélites; el peso de los cuerpos en la superficie terrestre es proporcional a su masa. Newton hizo la hipótesis, inspirado por la caída de una manzana dice la leyenda, de que todas estas fuerzas son del mismo tipo. Como la fuerza es proporcional a la masa del cuerpo atraído, por la ley de acción y reacción, debe ser proporcional también a la masa del cuerpo atractor. Más precisamente Newton supuso que existía una **Gravitación Universal**, o sea una atracción entre dos cuerpos cualesquiera del Universo, proporcional al producto de sus masas y con una magnitud que debía ser función de la distancia entre ellos. Si un cuerpo de masa M se encuentra en el origen la fuerza sobre otro de masa m colocado en la posición \vec{r} debe ser de la forma

$$\vec{F} = -mMf(r)\hat{r}.$$

Queda por encontrar la forma de la función $f(r)$. Newton la determinó usando la tercera ley de Kepler. Esta ley debe ser válida, no solamente para los planetas existentes, sino para cualquier objeto que orbite alrededor del Sol, en particular uno que tenga una órbita circular. Para la órbita circular el movimiento debe ser uniforme, y por lo tanto la aceleración es exclusivamente normal, o sea es la aceleración centrípeta igual a v^2/r , siendo r el radio de la órbita. Por la 2ª ley de Newton debe ser

$$m\frac{v^2}{r} = Mmf(r),$$

de donde

$$f(r) = \frac{v^2}{Mr}.$$

Por otra parte la velocidad es $2\pi r/T$, substituyendo este valor y el de T^2 dado por la tercera ley de Kepler obtenemos

$$f(r) = \frac{(2\pi r)^2}{MrKr^3} = \frac{G}{r^2}.$$

G es una constante universal. En cambio la constante de Kepler K depende de la masa del Sol,

$$K = \frac{(2\pi)^2}{GM}.$$

Demostración de la tercera ley de Kepler para órbitas elípticas

En esta sección demostraremos que si la fuerza entre el planeta y el Sol es la Gravitación Universal y si la órbita es elíptica como establece la primera ley entonces debe cumplirse la tercera ley. El razonamiento es semejante al anterior. Los únicos puntos en los que la fuerza es perpendicular a la trayectoria son el perihelio y el afelio. Supongamos que el planeta se encuentre en uno de ellos. En ese instante la aceleración es normal, por lo que tenemos

$$m \frac{v^2}{R} = \frac{GMm}{r^2} .$$

R no es la distancia planeta-Sol (que es r) sino el radio de curvatura de la órbita. La velocidad en ese punto es transversal, por lo que $l = mrv$, y la velocidad areal (130) es

$$\frac{dA}{dt} = \frac{rv}{2} .$$

La velocidad areal es igual al área de la elipse πab entre el período de translación T . Los semi-ejes son a y b . Tenemos por lo tanto que

$$v = \frac{2\pi ab}{rT} .$$

Substituyendo obtenemos

$$\frac{(2\pi ab)^2}{Rr^2T^2} = \frac{GM}{r^2}$$

de donde

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2 (ab)^2}{GM R} . \quad (150)$$

Queda por determinar la curvatura de la elipse en su vértice. Esto lo podemos lograr usando la fórmula de la aceleración normal de un movimiento ficticio que corresponda a la misma trayectoria. Por ejemplo

$$\vec{r} = a \cos(t)\hat{i} + b \sin(t)\hat{j}$$

corresponde a la ecuación paramétrica de una elipse de semi-ejes a y b . La velocidad y la aceleración son

$$\vec{v} = -a \sin(t)\hat{i} + b \cos(t)\hat{j} ,$$

$$\vec{a} = -a \cos(t)\hat{i} - b \sin(t)\hat{j} .$$

El vértice $(a, 0)$ corresponde a $t = 0$. La velocidad en ese instante es $(0, b)$ y la aceleración $(-a, 0)$. El radio de curvatura resulta entonces

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{b^2}{a} .$$

Substituyendo este último valor en (150) obtenemos el resultado esperado

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2}{GM} (ab)^2 \frac{a}{b^2} = K a^3 .$$

Energía efectiva del planeta

La energía potencial efectiva de un cuerpo con momento angular l en el campo gravitacional producido por una masa M es

$$U_{\text{ef}}(r) = -\frac{GmM}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}. \quad (151)$$

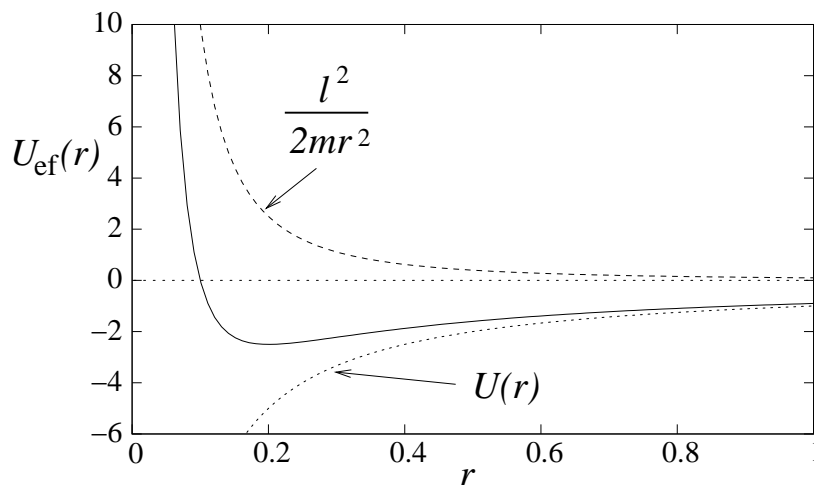


Fig. 7.6 Energía efectiva gravitacional

Para valores grandes de r domina la energía gravitacional y U_{ef} es negativa. Para valores pequeños de r predomina la energía centrífuga y U_{ef} tiende a $+\infty$. Para $E < 0$ la órbita es acotada (una elipse como veremos en la sección siguiente). El radio oscila entre un mínimo r_p (perihelio) y un máximo r_a (afelio). Estos valores se pueden obtener resolviendo la ecuación

$$E = -\frac{GmM}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}$$

que es una ecuación de segundo grado. Las soluciones son

$$r_a = \frac{GMm + \sqrt{(GMm)^2 + 2El^2/m}}{-2E}$$

y

$$r_p = \frac{GMm - \sqrt{(GMm)^2 + 2El^2/m}}{-2E}.$$

Ambas soluciones coinciden cuando se anula el radical, cosa que sucede para la energía

$$E_0 = -\frac{(GM)^2 m^3}{2l^2}.$$

Este caso corresponde a la órbita circular

$$r_p = r_a = \frac{GMm}{-2E_0} = \frac{l^2}{GMm^2}.$$

El semi-eje mayor se obtiene promediando r_a y r_p

$$a = (r_a + r_p)/2 = \frac{GMm}{-2E} .$$

mientras que la distancia f entre el Sol (foco) y el centro de la órbita es

$$f = (r_a - r_p)/2 = \frac{\sqrt{(GMm)^2 + 2El^2/m}}{-2E} ,$$

La excentricidad $e = f/a$ es

$$e = \frac{\sqrt{(GMm)^2 + 2El^2/m}}{GMm} .$$

Para $E \rightarrow 0^-$, $r_a \rightarrow +\infty$

$$r_p \rightarrow \frac{l^2}{2GMm^2}$$

y $e = 1$. El cuerpo se aleja continuamente, pero la velocidad tiende a cero. Veremos que corresponde a una órbita parabólica.

Para $E > 0$ el cuerpo también se aleja indefinidamente pero queda con una energía cinética remanente. La solución r_a es negativa y no tiene sentido físico. El único punto de retorno es r_p . La trayectoria es una hipérbola con $e > 1$.

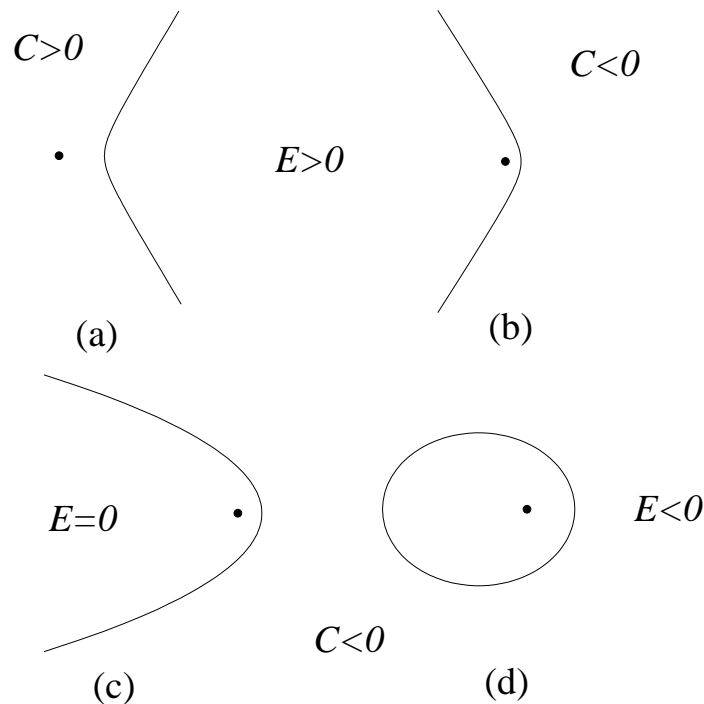


Fig. 7.7 Tipos de órbita de una fuerza $f(r) = C/r^2$
 (a) Hipérbola repulsiva, (b) hipérbola atractiva, (c) parábola, (d) elipse.

Demostración de la primera ley de Kepler

Encontrar cual órbita le corresponde a la atracción proporcional a r^{-2} puede ser muy engorroso. Mucho más fácil resulta demostrar que las órbitas que son secciones cónicas (elipses, hipérbolas o parábolas) con un foco en el centro de la fuerza corresponden a fuerzas proporcionales a r^{-2} . Es lo que haremos a continuación. Para lograr este objetivo primero necesitamos encontrar la expresión de la secciones cónicas en coordenadas polares. El resultado no es muy complicado. La expresión

$$r = \frac{c}{1 + e \cos \theta} \quad (152)$$

donde c y e son constantes, describe una sección cónica cuyo eje coincide con el eje x y un foco en el origen. Para $\theta = 0$ se obtiene el vértice más cercano al foco $r = c/(1 + e)$. La constante e se llama **excentricidad** y determina la forma de la curva. Cambiar el signo de e corresponde a rotar 180° la curva, por lo que consideraremos sólo valores positivos de e . Los valores de e que corresponden a cada tipo de curva son

$$\left\{ \begin{array}{ll} e = 0 & \text{circunferencia} \\ 0 < e < 1 & \text{elipse} \\ e = 1 & \text{parábola} \\ 1 < e & \text{hipérbola} \end{array} \right.$$

Para las elipses el vértice lejano ($\theta = \pi$) corresponde a $r = c/(1 - e)$. El semi-eje mayor es

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{c}{1 + e} + \frac{c}{1 - e} \right) = \frac{c}{1 - e^2}$$

y la distancia focal

$$f = \frac{1}{2} \left(\frac{c}{1 - e} - \frac{c}{1 + e} \right) = \frac{ec}{1 - e^2} = ea .$$

Para $e = 1$, r diverge para $\theta \rightarrow \pm\pi$. Para $e > 1$ r diverge para $\theta \rightarrow \pm \arccos(-1/e)$.

Se verifica fácilmente que son las secciones cónicas pasando a coordenadas cartesianas usando (132) y (133). La ecuación (152) la podemos reescribir como

$$r + er \cos \theta = c$$

que substituyendo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $r \cos \theta = x$ es equivalente a

$$x^2 + y^2 = (c - ex)^2 .$$

Esta ecuación implícita es un polinomio de segundo grado en x y en y , como se corresponde a las secciones cónicas.

Supongamos ahora que la órbita está dada por la ecuación (152) donde θ es función del tiempo t . La velocidad radial es

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \frac{ce \sin \theta}{(1 + e \cos \theta)^2} \frac{d\theta}{dt} = \frac{er^2 \sin \theta}{c} \frac{d\theta}{dt} = \frac{e \sin \theta l_z}{cm}$$

y la energía cinética radial

$$\frac{1}{2}mv_r^2 = \frac{e^2 \sin^2 \theta}{c^2} \frac{l^2}{2m}.$$

El ángulo de esta ecuación se puede eliminar despejando $\cos \theta$ de la (152) y substituyendo $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$

$$\cos \theta = e^{-1}(c/r - 1)$$

y

$$\frac{1}{2}mv_r^2 = [e^2 - (c/r - 1)^2] \frac{l^2}{2mc^2} = \frac{(e^2 - 1)l^2}{2mc^2} - \frac{l^2}{2mrc^2} + \frac{l^2}{mcr}.$$

Ahora sólo queda comparar el último resultado con la ley de conservación de la energía (149) para el caso planetario (151), identificando los términos con diferentes potencias de r . El primer término, independiente de r es la energía mecánica E

$$E = \frac{(e^2 - 1)l^2}{2mc^2},$$

el segundo que va como r^{-2} es efectivamente el opuesto de la energía potencial centrífuga y el último proporcional a r^{-1} corresponde a la energía potencial gravitatoria,

$$\frac{l^2}{mcr} = \frac{GmM}{r},$$

de donde

$$c = \frac{l^2}{m^2GM}.$$

Nótese que como habíamos adelantado las energías negativas corresponden a órbitas elípticas ($e < 1$), $E = 0$ corresponde a parábolas ($e = 1$) y las energías positivas a hipérbolas ($e > 1$). Nótese también que los parámetros de la órbita no dependen de la masa del planeta porque son funciones de las razones E/m y l/m .

El resultado obtenido es válido para cualquier tipo de fuerza central que vaya como r^{-2} , por ejemplo las fuerzas entre cargas eléctricas. Para $U(r) = C/r$ tenemos $c = -l^2/(mC)$. Si la fuerza es repulsiva ($C > 0$) c resulta negativa. Para que el radio r sea positivo en (152) debe ser $e > 1$ y $\cos \theta < -1/e$, o sea la órbita es una hipérbola pero en la rama lejana al foco (véase la figura 7.7).

Sistemas de Partículas

En el capítulo 4 ya vimos algunas propiedades de los sistemas de partículas. Definimos el centro de masas G en (54) y vimos que su velocidad multiplicada por la masa total M es la cantidad de movimiento total $\vec{P} = M\vec{v}_G$. Vimos también que la 3ª ley de Newton implica que la suma de las fuerzas internas de un sistema es nula, por lo que en la 2ª ley de Newton aplicada al sistema (57) aparece la fuerza externa total. Cuando no hay fuerzas externas, \vec{P} se conserva y el centro de masas se mueve con movimiento rectilíneo uniforme. En este capítulo usaremos la misma nomenclatura del capítulo 4 (ver Fig. 4.4) y trataremos otros aspectos de los sistemas, en particular lo relativo al momento angular y al torque.

Momento angular de un sistema

El momento angular respecto a un punto C de la partícula k -ésima que está en la posición P_k es

$$\vec{l}_k = \vec{CP}_k \times \vec{p}_k$$

y el momento angular total del sistema es

$$\vec{L}_C = \sum_k \vec{l}_k .$$

En los casos más típicos estamos interesados en el momento angular respecto del origen ($C = O$) o respecto del centro de masas ($C = G$). Como $\vec{OP}_k = \vec{OG} + \vec{GP}_k$ se tiene

$$\vec{L}_O = \vec{OG} \times \vec{P} + \vec{L}_G . \quad (153)$$

El primer término de la parte derecha se denomina momento angular **orbital**. El segundo término es momento angular **propio**. Este último *no depende del movimiento de translación del centro de masas*, solamente del movimiento de las partículas relativo al centro de masas. En efecto

$$\vec{v}_k = \vec{v}_G + \frac{d\vec{GP}_k}{dt}$$

y

$$\vec{L}_G = \sum_k m_k \vec{GP}_k \times \left(\vec{v}_G + \frac{d\vec{GP}_k}{dt} \right) = \sum_k m_k \vec{GP}_k \times \frac{d\vec{GP}_k}{dt} \quad (154)$$

porque

$$\sum_k m_k \vec{GP}_k = 0 .$$

Torque de un sistema

El torque respecto al punto C de la fuerza que la partícula j -ésima ejerce sobre la partícula k -ésima es

$$\vec{\tau}_{kj} = \vec{CP}_k \times \vec{F}_{kj}.$$

Como vimos en el capítulo 7, ecuación (127), la 3ª ley de Newton implica que $\vec{\tau}_{kj} = -\vec{\tau}_{jk}$. Por eso en un sistema, además de anularse la fuerza interna total, también *se anula la suma de los torques de las fuerzas internas*,

$$\vec{\tau}_{\text{total}} = \vec{\tau}_{\text{total}}^{(e)}. \quad (155)$$

El teorema del torque aplicado a la partícula k da

$$\frac{d\vec{l}_k}{dt} = -\vec{v}_C \times \vec{p}_k + \vec{\tau}_k.$$

Sumando a todas las partículas del sistema obtenemos

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = -\vec{v}_C \times \vec{P} + \vec{\tau}_{\text{total}}^{(e)}. \quad (156)$$

El primer término del lado derecho de esta ecuación se anula cuando C es un punto fijo ($\vec{v}_C = 0$) o cuando coincide con el centro de masas $C \equiv G$. En estos casos, si el torque externo total respecto a C es cero, se conserva el correspondiente momento angular total. En particular si no hay fuerzas externas se conserva el momento angular total respecto a un punto fijo cualquiera y respecto al centro de masas.

Sistemas de dos cuerpos

Consideremos un sistema formado por dos partículas de masas m_1 y m_2 y de posiciones \vec{r}_1 y \vec{r}_2 . Supongamos que no haya fuerzas externas. Las únicas fuerzas son la que el cuerpo 1 ejerce sobre el 2, \vec{F}_{21} y su reacción $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. Estas fuerzas deben ser paralelas el vector posición relativa de 2 respecto a 1, $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Supondremos además que para los efectos de la fuerza el espacio sea isótropo y homogéneo. En este caso la fuerza puede depender solamente de la distancia entre las partículas $r = |\vec{r}|$, tendremos entonces

$$\vec{F}_{21} = f(r)\hat{r}.$$

Capítulo 8: Sistemas de partículas

Como no hay fuerzas externas la cantidad de movimiento total \vec{P} se conserva, esto es, el centro de masas G se mueve con movimiento rectilíneo uniforme. Siempre podemos escoger un sistema de referencia inercial y un sistema de coordenadas de manera de que G se mantenga siempre en el origen. El movimiento de una partícula determina totalmente el de la otra. Tenemos

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0$$

de donde

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1} \vec{r}_2$$

y

$$\vec{r} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \vec{r}_2 = -\frac{m_1 + m_2}{m_2} \vec{r}_1 .$$

La aceleración relativa es

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \vec{a}_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} f(r) \hat{r} .$$

Esto es el movimiento relativo equivale al movimiento de una partícula en una fuerza central, pero con una **masa reducida**

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} . \quad (157)$$

La masa reducida es menor que m_1 y que m_2 . Usando la masa reducida las posiciones de las partículas son

$$\vec{r}_2 = \frac{\mu}{m_2} \vec{r} \quad (158)$$

y

$$\vec{r}_1 = -\frac{\mu}{m_1} \vec{r} . \quad (159)$$

La cantidad de movimiento relativa $\vec{p} = \mu \vec{v}$ es igual a la de la partícula 2 y opuesta a la de la partícula 1,

$$\vec{p} = \vec{p}_2 = -\vec{p}_1 . \quad (160)$$

Por otra parte el momento angular total es igual al momento angular del movimiento relativo,

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = -\vec{r}_1 \times \vec{p} + \vec{r}_2 \times \vec{p} = \vec{r} \times \vec{p} . \quad (161)$$

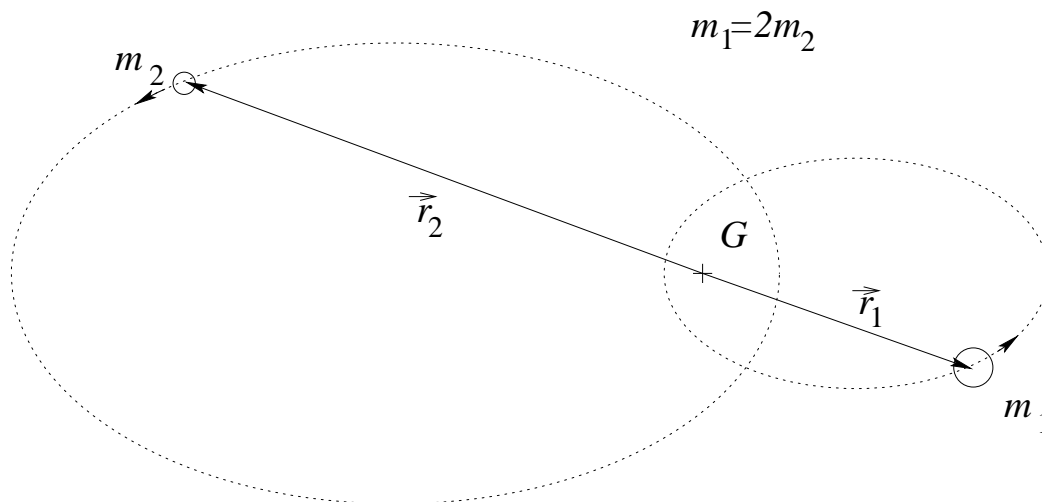


Fig. 8.1 Dos cuerpos con atracción gravitatoria

Si $m_1 \gg m_2$ el centro de masas coincide con la partícula 1, la masa reducida es igual a m_2 y el movimiento de la partícula 2 es igual al movimiento relativo. Es lo que sucede en el sistema Sol-planeta o en el movimiento de los satélites de Júpiter. En cambio en el caso del sistema Tierra-Luna, la diferencia de masas no es tan grande y el movimiento de la Tierra es apreciable ($M_T/M_L = 81$). Para el caso de la atracción gravitatoria la ecuación del movimiento es

$$\mu \vec{a} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \hat{r}$$

dividiendo por μ

$$\vec{a} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^2} \hat{r} .$$

La Luna no rota alrededor de la tierra con la misma constante de Kepler de los satélites artificiales, sino con una un 1,2% más pequeña.

El fenómeno de las estrellas binarias, en las que dos estrellas rotan alrededor de su centro de masas es bastante común en el Universo. Estudiando su movimiento ha sido posible asignarle masa a los diferentes tipos de estrella.

En los últimos años se han identificado estrellas cuyas velocidades presentan pequeñas fluctuaciones periódicas, producidas por la atracción de planetas que no son observables directamente. De esta manera han sido encontrados unos 200 planetas en estrellas distintas al Sol.

Propiedades de los centros de masas

En el capítulo 5 (87) vimos que la energía potencial de un sistema en un campo gravitatorio constante es igual a la energía potencial de una partícula colocada en el centro de masas y cuya masa sea igual a la masa total del sistema. Algo semejante sucede con el torque del peso,

$$\vec{\tau}_C = \sum_k \vec{CP}_k \times m_k \vec{g} = \left(\sum_k m_k \vec{CP}_k \right) \times \vec{g} = \vec{CG} \times M \vec{g} . \quad (162)$$

Los cuerpos están formados por átomos y moléculas, pero a escala macroscópica, debido a la gran diferencia con las distancias atómicas (10^{-10}m), se nos presentan como si fuesen continuos. En la aproximación de *medio continuo* la distribución de las masas está determinada por un campo escalar $\rho(P)$ llamado *densidad de masa*

$$\rho = \frac{dm}{dV} . \quad (163)$$

La unidad de masa, el gramo, fue escogida de manera de que la densidad del agua fuese 1g/cm^3 . La mayoría de los materiales sólidos y líquidos tienen densidades de algunas unidades de g/cm^3 . Para los medios continuos en la fórmula del CM se reemplaza el sumatorio sobre la partículas por un integral sobre las masas,

$$M = \int dm = \int \rho dV , \quad (164)$$

$$\vec{OG} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm = \frac{1}{M} \int \vec{r} \rho dV . \quad (165)$$

Capítulo 8: Sistemas de partículas

En el caso de láminas delgadas es conveniente definir la *densidad superficial* de masa

$$\sigma = \frac{dm}{dS} \quad (166)$$

y en el de hilos la *densidad lineal* de masa

$$\lambda = \frac{dm}{dl} . \quad (167)$$

En el cálculo de centros de masas es posible subdividir a los sistemas en partes a las que se les calcula los centros de masas, que luego se pueden combinar como si fuesen partículas. Si un sistema S está formado por dos partes disjuntas A y B , $S = A \cup B$

$$M_A = \sum_{k \in A} m_k , \quad M_B = \sum_{k \in B} m_k , \quad M = M_A + M_B ,$$

$$\vec{OG} = \frac{1}{M} \sum_{k \in S} m_k \vec{r}_k = \frac{1}{M} \sum_{k \in A} m_k \vec{r}_k + \frac{1}{M} \sum_{k \in B} m_k \vec{r}_k = \frac{M_A}{M} \vec{OG}_A + \frac{M_B}{M} \vec{OG}_B .$$

En un sistema formado por dos partículas A y B de masas M_A y M_B el centro de masas G siempre se encuentra en el segmento AB y las distancias entre G y las partículas son inversamente proporcionales a las masas.

$$M_A \overline{GA} = M_B \overline{GB} ;$$

si la masas son iguales G está en el punto medio.

Se dicen que un punto C es un **centro de simetría** del sistema si

$$\vec{CP'} = -\vec{CP} \implies \rho(P') = \rho(P) .$$

Se dice que una recta (plano) es un **eje (plano) de simetría** si para todo punto P y su proyección ortogonal P_\perp sobre la recta (plano)

$$P_\perp \vec{P'} = -P_\perp \vec{P} \implies \rho(P') = \rho(P) .$$

El centro de masas del par de elementos de volumen centrados en los puntos homólogos P y P' es el punto P_\perp para ejes o planos de simetría y el punto C para el centro de simetría. *El centro de masas G pertenece a los planos y ejes de simetría y coincide con el centro de simetría.*

Como ejemplo determinemos donde se encuentra el centro de masas de un sistema de tres partículas de igual masa, que se encuentren en los vértices del triángulo ABC (ver figura 8.2). El centro de masas del subsistema formado por las partículas B y C se encuentra en el punto medio M del segmento BC . El CM debe encontrarse necesariamente en el segmento AM de la *mediana* que pasa por A . Como el razonamiento se puede hacer escogiendo un par de partículas cualquiera se deduce que las tres medianas del triángulo se cruzan en el punto G (en geometría se llama baricentro del triángulo). Como el punto M corresponde a una masa doble que la de A tenemos

$$\overline{GA} = 2\overline{GM} .$$

Consideremos ahora una lámina delgada homogénea de forma triangular. Podemos subdividir la lámina en bandas infinitesimales paralelas al lado BC . El centro de masas de la banda $B'C'$ se encuentra en su punto medio M' . Como el triángulo $AB'C'$ es semejante al triángulo ABC el punto M' se encuentra en el segmento AM . Esto sucede para todas las bandas, luego el centro de masas G del sistema se encuentra en el segmento AM de la mediana. El centro de masas coincide también en este caso con el baricentro del triángulo.

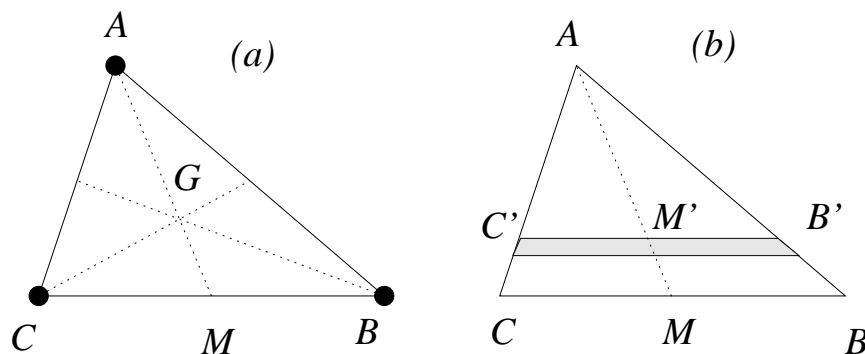


Fig. 8.2 Centros de masas de triángulos

a) Tres masas, b) lámina triangular.

Estática

La estática es la parte más antigua de la mecánica, por ejemplo las leyes de las palancas fueron descubiertas por Arquímedes (287–212 a. C.) matemático y físico griego de Siracusa (Sicilia). La estática trata de cuerpos en reposo, por lo que la cantidad de movimiento total y el momento angular total son nulos, $\vec{P} = 0$ y $\vec{L} = 0$. Las ecuaciones de los sistemas (57) y (156) se reducen en equilibrio a

$$\vec{F}_{\text{total}}^{(e)} = 0 \tag{168}$$

y

$$\vec{\tau}_{\text{total}}^{(e)} = 0. \tag{169}$$

Estas ecuaciones son válidas para cualquier parte del sistema y los torques se pueden calcular respecto a cualquier punto que resulte conveniente.

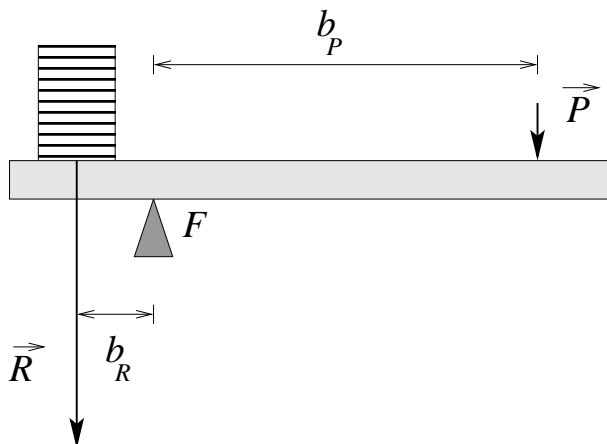


Fig. 8.3 Palanca

Una aplicación de la estática es el estudio de las palancas, *máquinas simples* usadas por el hombre desde la prehistoria. Una máquina simple es un dispositivo que permite cambiar la dirección o la magnitud de las fuerzas. Una palanca es un cuerpo rígido que puede bascular alrededor de un punto fijo, llamado *fulcro*. Sobre el cuerpo se aplican dos fuerzas, la resistencia \vec{R} y la potencia \vec{P} . Sobre el fulcro actúa una fuerza que equilibra la suma de la resistencia y la potencia. Del equilibrio de los torques respecto al fulcro (169) se deduce que la resistencia y la potencia son inversamente proporcionales a sus respectivos brazos

$$R b_R = P b_P .$$

Otra aplicación simple de la estática es la condición de estabilidad de un cuerpo apoyado sobre una superficie plana horizontal (piso). Se supone que las únicas fuerzas actuantes sobre el cuerpo son el peso y las reacciones del piso en los puntos de apoyo (puntos de contacto entre el cuerpo y el piso). Estas reacciones son verticales y dirigidas hacia arriba. Se define *base de sustentación* a la figura *convexa* más pequeña que contenga los puntos de apoyo. Tenemos el siguiente

Teorema. *Condición necesaria y suficiente para que un cuerpo apoyado sobre un piso horizontal esté en equilibrio estable es que la proyección sobre el piso de su centro de masas caiga en un punto interno de la base de sustentación.*

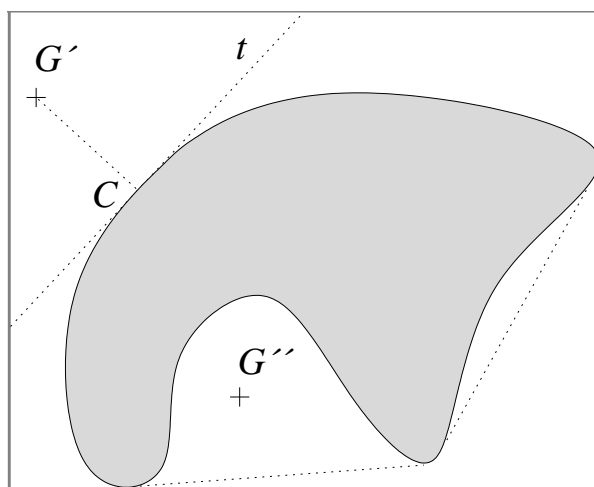


Fig. 8.4 Puntos de apoyo y base de sustentación

La zona sombreada son los puntos de apoyo. La zona limitada por el borde de los puntos de apoyo y las líneas punteadas es la base de sustentación. G' es una proyección del CM que cae fuera de la base de sustentación, mientras que G'' sería una proyección que cae dentro de ella

En la figura 8.4, consideremos primero el caso en el que la proyección del CM G' caiga fuera de la base de sustentación. Sea C el punto de la base de sustentación más cercano a G' . Consideremos la componente del torque respecto a C en la dirección de la tangente t . Las contribuciones al torque total del peso, que apunta hacia abajo, y de las reacciones, que apuntan hacia arriba, tienen el mismo signo porque están de lados opuestos de la tangente t . Por lo tanto es imposible que el torque se anule.

En cambio si la proyección cae dentro de la base de sustentación, como G'' , cualquier recta que pase por la proyección separará puntos de apoyo a ambos lados. Si calculamos

el torque respecto a la proyección G'' sólo las reacciones del piso contribuyen. Como las reacciones son verticales el torque es horizontal. Las leyes del equilibrio corresponden a 3 ecuaciones escalares, la suma de las fuerzas verticales y el torque horizontal. Como G'' debe ser un punto *interno* de la base de sustentación debe haber por lo menos 3 puntos de apoyo formando un triángulo. En el caso de que los puntos de apoyo sean sólo tres las reacciones en esos puntos quedan determinadas por las tres ecuaciones del equilibrio. La anulación del torque total implica que las tres reacciones deben tener el mismo sentido; en efecto si una reacción tuviese el sentido contrario al de las otras dos produciría un torque del mismo signo respecto a cualquier eje que separe ese punto de apoyo de los otros dos. Si hay más de tres puntos de apoyo las tres ecuaciones del equilibrio no son suficientes para determinar las reacciones, pero siempre será posible encontrar soluciones de reacciones dirigidas hacia arriba que cumplan con las ecuaciones de equilibrio.

Cuando la proyección del centro de masas cae en el borde de la base de sustentación el equilibrio es inestable.

Rotación Rígida

Fórmula general

Consideremos todas las posiciones que puede tener un cuerpo rígido manteniendo un punto del cuerpo siempre fijo en el mismo punto del espacio. Se pasa de una posición a otra mediante una transformación que llamamos **rotación**. Las rotaciones mantienen en su sitio, no solamente al punto fijo, sino a toda una recta, el **eje** de rotación, que naturalmente pasa por el punto fijo. Todos los puntos del cuerpo que no están en el eje rotan un mismo ángulo ϕ manteniéndose en circunferencias perpendiculares al eje y centradas en él. Una rotación queda especificada dando: el punto fijo, el versor del eje de rotación \hat{n} y el ángulo de rotación ϕ . Por convención se considera positiva una rotación antihoraria cuando el versor del eje apunta hacia nosotros (ver la figura 9.1).

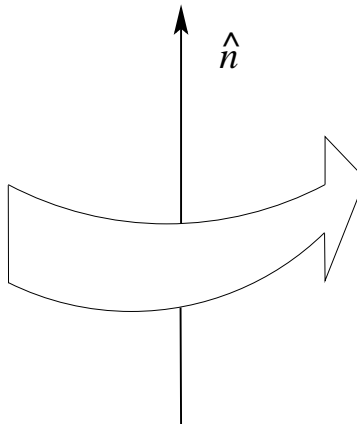


Fig. 9.1 Sentido positivo de rotación

Las rotaciones con el mismo punto fijo forman un *grupo*, esto es la composición de dos rotaciones es una rotación. Sin embargo se verifica fácilmente que las rotaciones respecto a ejes diferentes *no son conmutativas*. Dos rotaciones con el mismo eje conmutan y los ángulos se suman.

Para encontrar la fórmula general de la rotación de los puntos del espacio podemos suponer que el punto fijo sea el origen O . Al punto P le corresponderá el punto P' , cuyos vectores posición son respectivamente $\vec{x} = \overrightarrow{OP}$ y $\vec{x}' = \overrightarrow{OP'}$. La componente paralela al eje \vec{x}_{\parallel} se mantiene invariante, solamente la componente perpendicular \vec{x}_{\perp} rota.

La componente paralela al eje es

$$\vec{x}_{\parallel} = \vec{x} \cdot \hat{n} \hat{n}$$

y la componente perpendicular es

$$\vec{x}_{\perp} = \vec{x} - \vec{x}_{\parallel} = \vec{x} - \vec{x} \cdot \hat{n} \hat{n} .$$

La componente perpendicular rotada 90° es $\hat{n} \times \vec{x}_\perp$

$$\hat{n} \times \vec{x}_\perp = \hat{n} \times \vec{x}.$$

La posición del punto rotado será

$$\vec{x}' = \vec{x}_\parallel + \cos \phi \vec{x}_\perp + \sin \phi \hat{n} \times \vec{x}_\perp = \vec{x} \cdot \hat{n} \hat{n} + \cos \phi (\vec{x} - \vec{x} \cdot \hat{n} \hat{n}) + \sin \phi \hat{n} \times \vec{x}. \quad (170)$$

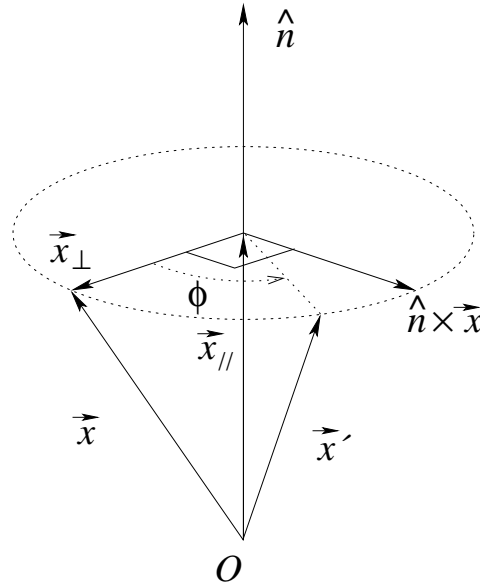


Fig. 9.2 Rotación rígida

Matriz de rotación

La transformación entre el punto inicial y el rotado es una transformación lineal, puede por lo tanto ser expresada con matrices

$$\vec{x} \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}, \quad \vec{x}' \equiv \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}', \quad \mathbf{x}' = \mathbf{R}\mathbf{x}.$$

La matriz de la rotación es

$$\mathbf{R} = \cos \phi \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1 - \cos \phi) \begin{pmatrix} n_1 n_1 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_2 n_1 & n_2 n_2 & n_2 n_3 \\ n_3 n_1 & n_3 n_2 & n_3 n_3 \end{pmatrix} - \sin \phi \begin{pmatrix} 0 & n_3 & -n_2 \\ -n_3 & 0 & n_1 \\ n_2 & -n_1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $\hat{n} = n_1 \hat{i} + n_2 \hat{j} + n_3 \hat{k}$.

Esta matriz corresponde a una rotación activa. Si se rotan los ejes, también puede representar una rotación pasiva, o sea el cambio de base ortonormal. Si los vectores de la base rotan un ángulo ϕ las coordenadas en la nueva base son iguales a las coordenadas del punto rotado activamente pero un ángulo opuesto $-\phi$.

La matriz inversa corresponde a rotar el ángulo $-\phi$. En la fórmula las matrices que multiplican las funciones pares de ϕ son simétricas, mientras que la que multiplica $\sin \phi$ es antisimétrica, por lo tanto la matriz inversa es la traspuesta, o sea la matriz es ortogonal, como ya se vio en el capítulo 2.

Movimiento de rotación. Vectores velocidad y aceleración angulares

Consideremos un cuerpo rígido que se mueva manteniendo un punto fijo, que para simplificar supondremos que están en el origen de coordenadas O . El vector posición de cada punto del cuerpo será una función del tiempo $\vec{x}(t)$. Las posiciones en un instante $t + \Delta t$ se obtienen de las posiciones en el instante t mediante una rotación de un ángulo $\phi(t, \Delta t)$, alrededor de un eje de dirección $\hat{n}(t, \Delta t)$. Naturalmente si $\Delta t = 0$ el ángulo debe ser cero

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \phi(t, \Delta t) = 0$$

pero en general el límite

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \hat{n}(t, \Delta t) = \hat{n}(t) \quad (171)$$

está bien definido. La dirección $\hat{n}(t)$ es la del *eje instantáneo de rotación*. El cuando $\Delta t \rightarrow 0$ el ángulo se anula, pero no así la **velocidad angular**

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\phi(t, \Delta t)}{\Delta t}. \quad (172)$$

Conviene definir un vector velocidad angular multiplicando ω por el versor del eje instantáneo de rotación

$$\vec{\omega} = \omega \hat{n}(t). \quad (173)$$

El vector $\vec{\omega}$ es axial.

En general ω *no es una derivada*. Sin embargo cuando el eje de rotación es fijo $\hat{n}(t) = \hat{n}$ la posición en cada instante se puede poner como una rotación $\phi(t)$ con el mismo eje \hat{n} respecto a la posición inicial. En ese caso $\vec{\omega} = \frac{d\phi}{dt} \hat{n}$.

Calculemos la velocidad de un punto del cuerpo en rotación,

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{(\cos \phi - 1)}{\phi} (\vec{x} - \vec{x} \cdot \hat{n} \hat{n}) + \frac{\sin \phi}{\phi} \hat{n} \times \vec{x} \right] \frac{\phi}{\Delta t} \\ &= \vec{\omega} \times \vec{x} \end{aligned} \quad (174)$$

donde usamos

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{(\cos \phi - 1)}{\phi} = 0$$

y

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\sin \phi}{\phi} = 1.$$

La relación (174) es la ecuación fundamental en todo lo relativo al movimiento de rotación.

El vector $\vec{\omega}$ es general una función del tiempo; su derivada se define como la **aceleración angular** $\vec{\alpha}$

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (175)$$

Aceleración de un punto de un cuerpo en rotación

Derivando la expresión de la velocidad (174) se obtiene la aceleración de un punto de un cuerpo en rotación

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{x} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{x} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}) . \quad (176)$$

El segundo término corresponde a la aceleración *centrípeta*, usando el teorema 38 del capítulo 2 obtenemos

$$\vec{a}_c = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}) = -\omega^2(\vec{x} - \hat{n} \cdot \vec{x} \hat{n}) = -\omega^2 \vec{x}_\perp .$$

Movimiento rígido general

Para describir el movimiento genérico de un cuerpo rígido escogemos un punto cualquiera del cuerpo, C , cuyo movimiento está dado por el vector $\vec{OC}(t)$. La posición de otro punto del cuerpo P será

$$\vec{OP} = \vec{OC} + \vec{CP} .$$

La evolución del vector \vec{CP} corresponde a una rotación con velocidad angular $\vec{\omega}$. Derivando obtenemos

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{CP} . \quad (177)$$

La velocidad del punto P es la suma de la velocidad de la translación del punto C más la rotación alrededor de dicho punto. La velocidad angular no depende del punto C . En efecto

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{AP} = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{CA} + \vec{\omega} \times \vec{AP} = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times (\vec{CA} + \vec{AP}) = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{CP} .$$

Derivando nuevamente obtenemos la aceleración

$$\vec{a}_P = \vec{a}_C + \vec{\alpha} \times \vec{CP} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{CP}) . \quad (178)$$

También en este caso es la suma de la aceleración de la translación más la aceleración de la rotación.

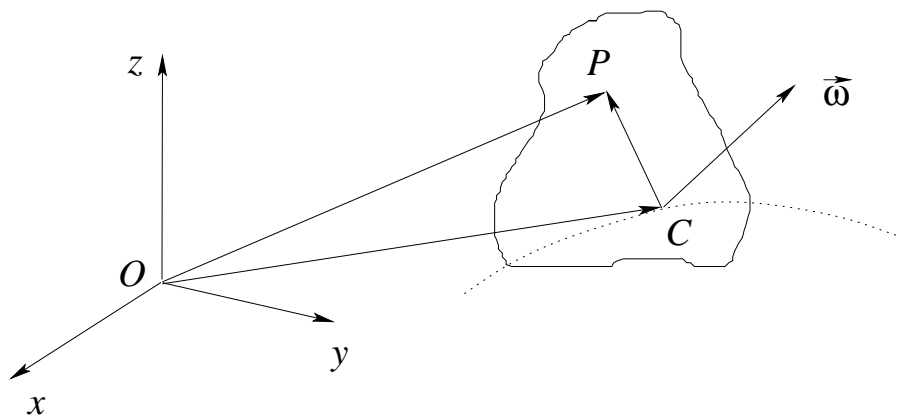


Fig. 9.3 Movimiento rígido general

El punto C se traslada en la trayectoria punteada. El vector \vec{CP} rota con velocidad angular $\vec{\omega}$.

Cambio de marco de referencia con rotación

En el capítulo 3 se estudió el cambio de marco de referencia sin rotación relativa (translación pura). Trataremos aquí el caso general en el que también hay rotación. Para introducir el tema nos remitimos a lo ya planteado en el capítulo 3 (véase la figura 3.12). Sean dos sistemas de referencia, R que consideramos fijo, con origen O y terna ortonormal $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ y otro móvil R' , con origen O' y base $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$. El sistema R' rota con velocidad angular $\vec{\omega}$ respecto a R . La rotación significa que la terna del sistema R' , vista desde el sistema fijo R es función del tiempo. Como los vectores de la base corresponden a las posiciones de los puntos con coordenadas $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, aplicando la ecuación (174) obtenemos

$$\frac{d\hat{i}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{i}', \quad \frac{d\hat{j}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{j}', \quad \frac{d\hat{k}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{k}' .$$

Debido a que la base es dependiente del tiempo, las derivadas temporales de un vector cualquiera en los dos marcos de referencia son diferentes. Más precisamente, si $\vec{b} = b_1\hat{i}' + b_2\hat{j}' + b_3\hat{k}'$, tendremos

$$\left(\frac{d\vec{b}}{dt}\right)_{R'} = \frac{db_1}{dt}\hat{i}' + \frac{db_2}{dt}\hat{j}' + \frac{db_3}{dt}\hat{k}'$$

y

$$\left(\frac{d\vec{b}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{b}}{dt}\right)_{R'} + \vec{\omega} \times \vec{b} .$$

Consideremos ahora un móvil $P(t)$ en ambos marcos de referencia. En R

$$\vec{v} = \left(\frac{d\vec{OP}}{dt}\right)_R$$

y

$$\vec{a} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_R ,$$

mientras que en R'

$$\vec{v}' = \left(\frac{d\vec{O'P}}{dt}\right)_{R'}$$

y

$$\vec{a}' = \left(\frac{d\vec{v}'}{dt}\right)_{R'} .$$

Por simple suma de vectores la relación entre las posiciones es

$$\vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'P} .$$

Derivando respecto al tiempo en R

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{O'P} + \vec{v}' . \quad (179)$$

Vemos que a la velocidad relativa a R' hay que sumarle la velocidad del punto del sistema de referencia móvil que se encuentra en el mismo sitio.

Derivando nuevamente obtenemos la aceleración en R . Debemos tomar en cuenta que

$$\left(\frac{\vec{O}'P}{dt}\right)_R = \vec{\omega} \times \vec{O}'P + \vec{v}'$$

y que

$$\left(\frac{\vec{v}'}{dt}\right)_R = \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{a}' .$$

Obtenemos finalmente

$$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{\alpha} \times \vec{O}'P + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{O}'P) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{a}' . \quad (180)$$

Además de la aceleración relativa a R' y de la aceleración del movimiento rígido del punto del marco R' en el que se encuentra el móvil, aparece un término dependiente de la velocidad relativa $2\vec{\omega} \times \vec{v}'$ que se denomina aceleración de Coriolis en honor al ingeniero francés Gaspard-Gustave Coriolis (1792–1843) quien desarrolló la teoría de los marcos de referencia en rotación.

Fuerzas aparentes con rotación

En muchos casos es conveniente usar sistemas de referencia que no son inerciales, por ejemplo el suelo terrestre, un avión etc. Es necesario determinar como se modifica en estos sistemas la ecuación que determina los movimientos, o sea la segunda ley de Newton. Supongamos que en la discusión de la sección anterior el marco de referencia fijo R sea inercial. Consideremos una partícula de masa m sobre la que actúa una fuerza \vec{F} , será

$$m\vec{a} = \vec{F} .$$

Usando la (180) obtenemos en el sistema móvil R'

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m[\vec{a}_{O'} + \vec{\alpha} \times \vec{O}'P + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{O}'P) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'] .$$

Podemos definir la **fuerza aparente** como

$$\vec{F}_a = -m[\vec{a}_{O'} + \vec{\alpha} \times \vec{O}'P + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{O}'P) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'] . \quad (181)$$

con lo que la ecuación en el marco no-inercial tiene la misma forma que la segunda ley pero a la fuerza verdadera se le suma la fuerza aparente,

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_a .$$

En la fuerza aparente, o inercial, tenemos un término de translación, un término de aceleración angular, un término de fuerza centrífuga y la fuerza de Coriolis.

Efecto de la rotación de la Tierra

La Tierra no es un sistema de referencia inercial por dos razones, primero porque su centro rota alrededor del Sol, movimiento que también es afectado por la Luna, y segundo porque rota alrededor de su eje en un día. El tiempo característico de la rotación alrededor del Sol es el año y el de la modulación debida a la Luna es de 28 días. Para procesos que duren unos pocos días podemos despreciar la aceleración de la translación $\vec{a}_{O'} \approx 0$. La velocidad angular de rotación de la Tierra $\vec{\omega}$ es prácticamente constante, $\dot{\vec{\omega}} = 0$. Las fuerzas aparentes relevantes son entonces, la fuerza centrífuga $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{O}'P)$ y la fuerza de Coriolis $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$.

Veamos primero el efecto de la fuerza centrífuga. Se supone que estamos estudiando fenómenos poco extensos, de manera que los desplazamientos son despreciables respecto al radio de la Tierra R . Introduzcamos un sistema de coordenadas en la superficie terrestre donde el eje z es vertical, x está dirigido al Este y y al Norte. Sea ψ la latitud. Con estas coordenadas el versor del eje de la tierra \hat{n} es

$$\hat{n} = \cos \psi \hat{j} + \sin \psi \hat{k}$$

y el vector $\vec{O}'P$ resulta igual a $R\hat{k}$. La fuerza centrífuga será

$$\vec{F}_c = -m\omega^2 R \hat{n} \times (\hat{n} \times \hat{k}) = m\omega^2 R \cos \psi (\cos \psi \hat{k} - \sin \psi \hat{j}) .$$

Esta fuerza es constante y proporcional a la masa, por lo que se suma con el peso $m\vec{g}$, produciendo una aceleración de gravedad efectiva (ver figura 4.6)

$$\vec{g}_{\text{ef}} = -(g - \omega^2 R \cos^2 \psi) \hat{k} - \omega^2 R \cos \psi \sin \psi \hat{j} .$$

No solamente se cambia la magnitud de la aceleración de gravedad, sino también la dirección de la vertical. El efecto es pequeño pero medible, $\omega^2 R = 3,38 \times 10^{-2} \text{m/s}^2$.

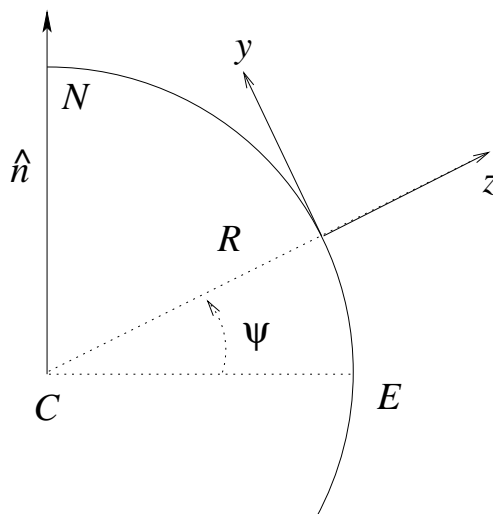


Fig. 9.4 Sistema de coordenadas en la superficie terrestre

El efecto de la fuerza de Coriolis se observa en procesos que duren mucho tiempo o tengan velocidades grandes. Por ejemplo las balas de cañón, que recorren grandes distancias

a alta velocidad, son desviadas significativamente. En el hemisferio norte, una bala dirigida al Norte será desviada al Este. En general todo efecto que tenga que ver con la rotación de la Tierra es debido a la aceleración de Coriolis; por ejemplo el sentido de circulación de corrientes de agua y aire, el sentido de rotación de los huracanes. Aunque no haya todavía una teoría aceptable sobre el origen del campo magnético terrestre, dada la proximidad de los polos geográficos y magnéticos es de suponer que la fuerza de Coriolis deba ser relevante.

Péndulo de Foucault

El físico francés Jean Bernard Léon Foucault (1819–1868) utilizó un gran péndulo (26 kilos de masa y 67 metros de largo) para demostrar la rotación de la Tierra, mediante la observación de que el plano de oscilación del péndulo rotaba lentamente. Veamos la teoría con cierto detalle. Consideremos un sistema de coordenadas fijo al suelo como el descrito en la sección anterior. Pongamos el péndulo de forma que su punto de equilibrio sea el origen O . Sea l la longitud del péndulo. La masa está vinculada a moverse en una esfera de radio l . Para oscilaciones pequeñas el movimiento es prácticamente plano. Usaremos como coordenadas del cuerpo para estudiar su movimiento sus coordenadas cartesianas x y y . La coordenada z será

$$z = l - \sqrt{l^2 - x^2 - y^2}.$$

Inicialmente no consideraremos la fuerza de Coriolis. Podemos utilizar la energía para encontrar las ecuaciones del movimiento. La energía potencial gravitatoria es

$$U(x, y) = mgz = mgl \left(1 - \sqrt{1 - (x^2 + y^2)/l^2} \right) \approx \frac{mg}{2l} (x^2 + y^2).$$

Aquí expandimos el radical en primer orden, $\sqrt{1 + \epsilon} \approx 1 + \epsilon/2$. La fuerza horizontal se obtiene derivando U

$$\vec{F} \approx -\frac{\partial U}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial U}{\partial y} \hat{j} = -m \frac{g}{l} \vec{r}$$

donde $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$. El vínculo es $z \approx 0$ y la ecuación del movimiento es

$$m\vec{a} = -m \frac{g}{l} \vec{r}$$

correspondiente a un oscilador armónico en dos dimensiones con frecuencia angular $\sqrt{g/l}$.

A esta ecuación hay que sumarle el efecto de la fuerza de Coriolis. Esta fuerza tendrá una componente vertical y una horizontal. En la ecuación debe aparecer solamente la componente horizontal, la vertical se suma con la fuerza del vínculo (la tensión de la cuerda). El producto vectorial $\vec{\omega} \times \vec{v}$ es

$$\vec{\omega} \times \vec{v} = \omega(\cos \psi \hat{j} + \sin \psi \hat{k}) \times (v_x \hat{i} + v_y \hat{j}) = -\omega \cos \psi v_x \hat{k} + \omega \sin \psi \hat{k} \times \vec{v}$$

por lo que la ecuación resulta

$$\vec{a} = -\frac{g}{l} \vec{r} - 2\omega \sin \psi \hat{k} \times \vec{v}.$$

El problema ahora es resolver la ecuación. Una forma fácil se basa en un cambio de sistema de referencia. Constatamos que el término dependiente de la velocidad tiene la forma de una aceleración de Coriolis producida por una velocidad angular vertical. La idea

Capítulo 9: Rotación rígida

es introducir un cambio de marco de referencia, montándonos en uno que gire alrededor del eje z con una velocidad angular $\vec{\Omega} = \Omega \hat{k}$ escogida de tal manera que el término de Coriolis cancele el segundo término de la ecuación. Llamando \vec{a}' y \vec{v}' la aceleración y la velocidad en el nuevo marco tenemos

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{\Omega} \times \vec{r}$$

y

$$\vec{a}' = -\frac{g}{l}\vec{r} - 2\omega \sin \psi \hat{k} \times \vec{v} - 2\vec{\Omega} \times \vec{v}' - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = -\frac{g}{l}\vec{r} - 2(\omega \sin \psi \hat{k} + \vec{\Omega}) \times \vec{v} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}).$$

Poniendo

$$\vec{\Omega} = -\omega \sin \psi \hat{k}$$

obtenemos finalmente

$$\vec{a}' = -\left(\frac{g}{l} + \Omega^2\right)\vec{r}.$$

Esta ecuación, válida en el sistema rotante es también armónica pero con una frecuencia de oscilación ligeramente mayor. Queda así demostrado que el plano de oscilación del péndulo rota con velocidad angular $\vec{\Omega}$. En los polos $\vec{\Omega} = -\vec{\omega}$.

Capítulo 10

Dinámica de Cuerpo Rígido

La mayoría de los objetos sólidos de nuestro entorno son aproximadamente rígidos, o sea las distancias entre sus partes se mantienen constantes. Dedicamos este capítulo al estudio de la dinámica de los cuerpos rígidos. A diferencia de lo que pasa con un sistema en general, que si tiene N partículas requiere de $3N$ coordenadas para determinar su configuración, para un sistema rígido bastan 6 números. Tres representan la posición de un punto del cuerpo y los otros tres la orientación del cuerpo.

Conociendo las fuerzas externas que actúan sobre un sistema rígido, la 2ª ley de Newton (57) y la ley del torque (156) (6 ecuaciones escalares en total) son suficientes para determinar el movimiento. Como el ímpetu total \vec{P} es igual a $M\vec{v}_G$, si escogemos al centro de masas G como punto del sistema que determina la posición, la ecuación dinámica de la translación está relacionada de una manera inmediata con la cinemática. En la ecuación dinámica de la rotación (156) aparece el momento angular total \vec{L} mientras que la cinemática está determinada por la velocidad angular $\vec{\omega}$. Lo primero que hay que hacer para estudiar la dinámica de rotación es determinar la relación que hay entre esos dos vectores.

Tensor momento de inercia

Consideremos un cuerpo que tiene un punto fijo C . Llamemos \vec{r}_k los desplazamientos que van del punto C a la posición de la partícula k -ésima $\vec{r}_k = \vec{CP}_k$. La velocidad de la partícula k -ésima es $\vec{v}_k = \vec{\omega} \times \vec{r}_k$ y su momento angular respecto a C

$$\vec{l}_k = m_k \vec{r}_k \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_k) .$$

El momento angular total resulta

$$\vec{L}_C = \sum_k m_k [r_k^2 \vec{\omega} - (\vec{r}_k \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_k] . \quad (182)$$

Para obtener este resultado usamos la identidad vectorial del teorema 38 del capítulo 2.

Nótese que en general \vec{L} y $\vec{\omega}$ **no** son paralelos. Sin embargo la relación entre \vec{L} y $\vec{\omega}$ es una *transformación lineal*. Nótese también que dicha transformación sólo depende de las m_k y \vec{r}_k . Aparece aquí la conveniencia de definir una magnitud física que represente la transformación lineal. Estas magnitudes se denominan **tensores**. Un tensor es algo que multiplicado por vector produce otro vector

$$\text{Vector} = \text{Tensor} \cdot \text{Vector} .$$

Los tensores forman un espacio vectorial. Si escogemos un sistema de coordenadas cartesianas a los vectores los podemos representar con matrices 3×1 y los tensores con matrices 3×3 . Para que una matriz represente un tensor debe transformarse adecuadamente cuando se cambia el sistema de coordenadas. Si V es la matriz columna que representa a un vector \vec{v} en un sistema de coordenadas y V' la matriz que lo representa en otro, hay una

matriz de rotación R que nos relaciona las dos matrices $V' = RV$. Las matrices 3×3 de un tensor en ambos sistemas se relacionan de la siguiente manera

$$T' = RTR^t$$

donde R^t es la matriz traspuesta de R . Recordemos que la matriz R es ortogonal $R^t = R^{-1}$. Así como las magnitudes vectoriales las indicamos con un flecha a las tensoriales las indicamos con una doble flecha \overleftrightarrow{T} . Al producto del tensor por el vector lo indicamos con el punto $\overleftrightarrow{T} \cdot \vec{v}$.

Hay dos tipos de tensores que nos interesa destacar. Uno es el tensor identidad, cuya matriz es la matriz identidad en todos los sistemas de coordenadas

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y que no modifica a los vectores por los cuales se multiplique. Al tensor identidad lo llamaremos aquí $\overleftrightarrow{1}$. El otro tipo de tensor son las **díadas** o **producto tensorial** de dos vectores. Dados dos vectores \vec{a} y \vec{b} la díada $\overleftarrow{a} \overrightarrow{b}$ se define con la siguiente identidad que especifica como opera sobre el vector \vec{v}

$$(\overleftarrow{a} \overrightarrow{b}) \cdot \vec{v} \equiv (\vec{b} \cdot \vec{v}) \vec{a}.$$

La matriz de la díada se obtiene multiplicando las componentes de los vectores

$$\overleftarrow{a} \overrightarrow{b} \equiv \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}.$$

Dicho todo esto ahora tenemos todo lo necesario para definir el tensor **momento de inercia** respecto al punto C

$$\overleftrightarrow{I}_C = \sum_k m_k (r_k^2 \overleftrightarrow{1} - \overleftarrow{r}_k \overrightarrow{r}_k) \quad (183)$$

con el que se calcula el momento angular

$$\vec{L}_C = \overleftrightarrow{I}_C \cdot \vec{\omega}. \quad (184)$$

Cuando tenemos una distribución continua de masas el momento es

$$\overleftrightarrow{I}_C = \int (r^2 \overleftrightarrow{1} - \overleftarrow{r} \overrightarrow{r}) dm. \quad (185)$$

El elemento de masa se calcula con la densidad de masa, lineal, de superficie o de volumen según sea el caso.

Los momentos de inercia son aditivos: *el momento de inercia del todo es la suma de los momentos de las partes.*

Momento de inercia respecto a un eje

Un caso común es cuando el cuerpo rota alrededor de un eje fijo, $\vec{\omega} = \omega \hat{n}$. Para determinar el movimiento basta conocer la componente de \vec{L} en la dirección del eje \hat{n}

$$\vec{L} \cdot \hat{n} = \hat{n} \cdot \vec{I} \cdot \hat{n} \omega = I_n \omega . \quad (186)$$

El momento de inercia respecto al eje \hat{n} es

$$I_n = \hat{n} \cdot \vec{I} \cdot \hat{n} = \sum_k m_k [r_k^2 - (\vec{r}_k \cdot \hat{n})^2] = \sum_k m_k r_{\perp k}^2 \quad (187)$$

donde $r_{\perp k}$ representa la distancia que hay entre la partícula k -ésima y el eje. El momento de inercia respecto al eje resulta independiente del punto C (véase la figura 10.1).

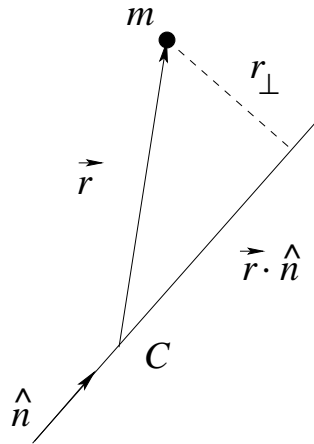


Fig. 10.1 Momento de inercia de una masa respecto a un eje

En algunos casos conviene factorizar la masa del cuerpo, para eso se define el **radio de giro** R_g de manera que resulte

$$I_n = MR_g^2 .$$

Cuando el cuerpo es homogéneo el momento I_n es proporcional a la masa y el radio de giro es un factor puramente geométrico que depende de la forma y dimensiones del cuerpo.

Teorema de Steiner

El momento de inercia respecto a un punto cualquiera se puede calcular a partir del momento de inercia respecto al centro de masas G usando la relación debida al matemático suizo Jakob Steiner (1796–1863). Definiendo

$$\vec{r}_k = \vec{GP}_k \quad \text{y} \quad \vec{x}_G = \vec{OG}$$

tenemos

$$\vec{OP}_k = \vec{x}_G + \vec{r}_k .$$

El momento de inercia respecto al origen resulta

$$\begin{aligned} \overset{\leftrightarrow}{I}_O &= \sum_k m_k [(\vec{x}_G + \vec{r}_k)^2 \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{1}} - (\overset{\leftarrow}{x}_G + \overset{\leftarrow}{r}_k)(\vec{x}_G + \vec{r}_k)] \\ &= \sum_k m_k [|\vec{x}_G|^2 \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{1}} - \overset{\leftarrow}{x}_G \vec{x}_G] + \sum_k m_k [r_k^2 \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{1}} - \overset{\leftarrow}{r}_k \vec{r}_k] \\ &= M [|\vec{x}_G|^2 \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{1}} - \overset{\leftarrow}{x}_G \vec{x}_G] + \overset{\leftrightarrow}{I}_G . \end{aligned} \tag{188}$$

Los términos lineales en \vec{r}_k se anulan porque por la definición de centro de masas

$$\sum_k m_k \vec{r}_k = 0 .$$

Para obtener el tensor momento de inercia respecto a O hay que sumarle al momento inercia respecto al centro de masas G el momento correspondiente a una partícula con masa $M = \sum_k m_k$ colocada en G .

Este teorema aplicado al caso de los momentos respecto a un eje se llama

Teorema de los ejes paralelos. *El momento de inercia respecto a un eje es igual al momento de inercia respecto al eje paralelo que pasa por el centro masas más Mr_G^2 , donde M es la masa total y r_G es la distancia entre el centro de masas y el eje.*

Ejes principales de inercia

En general $\vec{\omega}$ y \vec{L} no son paralelos, pero existen direcciones particulares en que lo son. Son los **ejes principales de inercia**. Para determinar cuales son esas direcciones se usa la ecuación

$$\overleftrightarrow{I} \cdot \vec{\omega} = I\vec{\omega} .$$

En esta ecuación las incógnitas son el vector $\vec{\omega}$ y el número I . Este es un ejemplo típico del problema de los *autovalores*. Los números I que cumplen con la ecuación son los autovalores y los vectores correspondientes son los *autovectores*. Dejaremos los detalles a los cursos de matemática. Nos limitaremos aquí a señalar algunos resultados. Se demuestra que para matrices simétricas, como es la del momento de inercia, siempre hay tres autovectores perpendiculares entre sí. Esto es, siempre hay tres ejes principales de inercia perpendiculares entre sí. Si \hat{e}_1 , \hat{e}_2 y \hat{e}_3 son los versores de los ejes principales y I_1 , I_2 y I_3 los correspondientes momentos de inercia tenemos que el tensor se puede expresar como

$$\overleftrightarrow{I} = I_1 \hat{e}_1 \hat{e}_1 + I_2 \hat{e}_2 \hat{e}_2 + I_3 \hat{e}_3 \hat{e}_3 .$$

Si escogemos unas coordenadas paralelas a los ejes principales la matriz correspondiente es diagonal

$$\overleftrightarrow{I} \equiv \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} .$$

Cuando hay elementos de simetría es posible identificar algunos ejes principales sin efectuar cálculo alguno. En efecto, *son ejes principales de inercia: los ejes de simetría, la recta perpendicular a un plano de simetría que contenga al punto C y la intersección de dos planos de simetría*.

Un caso particular interesante es el de los cuerpos planos (láminas). Pongamos que el cuerpo están en el plano xy . Consideremos el momento de inercia respecto al origen. El plano xy es un plano de simetría, por lo que el eje z es un eje principal. El momento respecto al eje z es

$$I_z = \int (x^2 + y^2) dm .$$

El momento respecto al eje x es

$$I_x = \int y^2 dm$$

y el correspondiente al y es

$$I_y = \int x^2 dm .$$

En general x y y no son ejes principales pero siempre resulta

$$I_z = I_y + I_x .$$

Ejemplos de momentos de inercia

Consideraremos aquí varios ejemplos de momentos de inercia en 1, 2 y 3 dimensiones.

(1) Anillo de radio R y masa M . Es un caso plano. Si ponemos el anillo en el plano xy y su centro en el origen el eje z será el eje de simetría del anillo por lo tanto será un eje principal de inercia. Los planos que contienen al eje z son planos de simetría por lo que los ejes x y y también son ejes principales. La distancia de todos los puntos del anillo al centro es R , por lo que el momento de inercia respecto del eje z es $I_3 = MR^2$. Por simetría $I_1 = I_2 = I_3/2 = MR^2/2$. Si cambiamos el punto fijo los momentos cambian, por ejemplo los momentos respecto al punto $A \equiv (R, 0, 0)$ son

$$I_{A1} = I_{G1} = \frac{MR^2}{2},$$

$$I_{A2} = MR^2 + I_{G2} = \frac{3MR^2}{2}$$

y

$$I_{A3} = MR^2 + I_{G3} = 2MR^2.$$

(2) Disco de radio R . En este caso el momento respecto al eje de simetría es

$$I_3 = \int \int_{r < R} r^2 \sigma dx dy = \frac{M}{\pi R^2} \int_0^R r^2 2\pi r dr = \frac{MR^2}{2}.$$

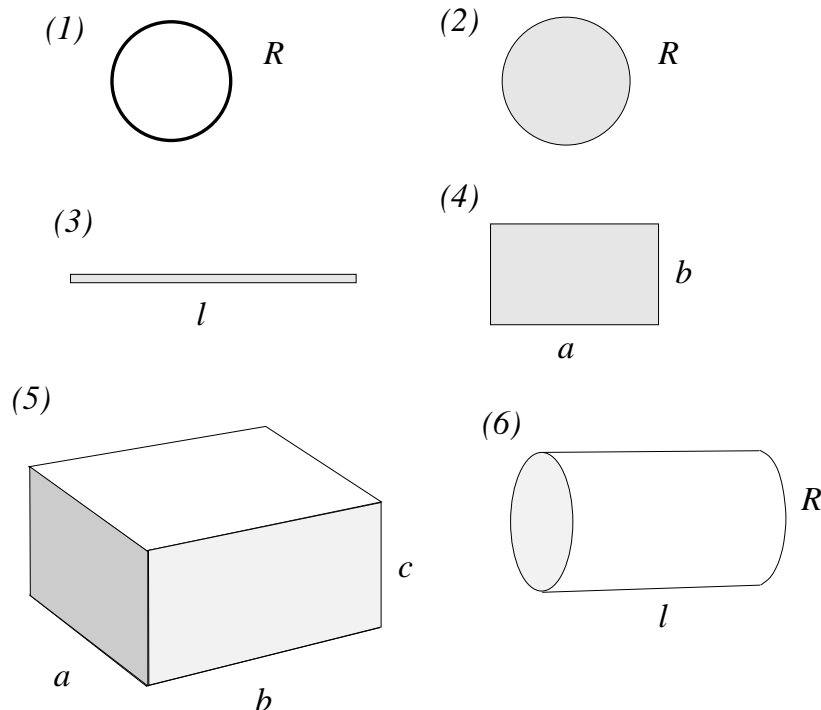


Fig. 10.2 Dimensiones de cuerpos diversos

(1) Anillo, (2) Disco, (3) Barra, (4) Rectángulo, (5) Paralelepípedo, (6) Cilindro. Los momentos de inercia están en el texto.

(3) Una barra delgada de largo l no tiene momento a lo largo de la barra, y cualquier eje perpendicular a la barra es principal. Si ponemos el origen en un extremo y la barra a lo largo del eje x , $I_1 = 0$ y

$$I_2 = \int_0^l x^2 \frac{M}{l} dx = \frac{Ml^2}{3}.$$

Con respecto al centro de la barra

$$I_G = \frac{Ml^2}{3} - M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{Ml^2}{12}.$$

(4) Un rectángulo de lados a y b con el origen en el centro tiene momentos

$$I_1 = \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy y^2 \frac{M}{ab} = \frac{Mb^2}{12},$$

$$I_2 = \frac{Ma^2}{12} \quad \text{y} \quad I_3 = I_1 + I_2 = \frac{M(a^2 + b^2)}{12}.$$

(5) El momento del eje z de un paralelepípedo rectángulo de aristas a , b y c es

$$I_3 = \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz (x^2 + y^2) \frac{M}{abc} = \frac{M(a^2 + b^2)}{12}.$$

Los otros momentos, se obtienen por simetría

$$I_1 = \frac{M(b^2 + c^2)}{12} \quad \text{y} \quad I_2 = \frac{M(a^2 + c^2)}{12}.$$

(6) Cilindro sólido de radio R y largo l . Pongamos el eje z a lo largo del eje del cilindro. Conviene usar coordenadas cilíndricas r , ϕ y z . El elemento de volumen es $dV = r d\phi dr dz$. El momento respecto a z es

$$I_3 = \int_{-l/2}^{l/2} dz \int_0^R 2\pi r dr r^2 \frac{M}{\pi R^2 l} = \frac{MR^2}{2}.$$

Con respecto al eje x ,

$$I_1 = \int_{-l/2}^{l/2} dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R dr r (z^2 + r^2 \sin^2 \phi) \frac{M}{\pi R^2 l} = M \left(\frac{l^2}{12} + \frac{R^2}{4} \right).$$

Nótese que poniendo $R = 0$ se obtiene la barra y poniendo $l = 0$ el disco.

(7) Concha esférica de radio R . Por simetría todos los ejes que pasen por el centro son principales y tienen el mismo momento. Podemos usar coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta. \end{cases} \quad (189)$$

La coordenada r es el módulo de \vec{r} , la inclinación θ es el ángulo que forman \vec{r} y el eje z y el acimut ϕ es el ángulo que forma la proyección de \vec{r} sobre el plano xy con el eje x . El ángulo ϕ varía entre 0 y 2π y θ entre 0 y π .

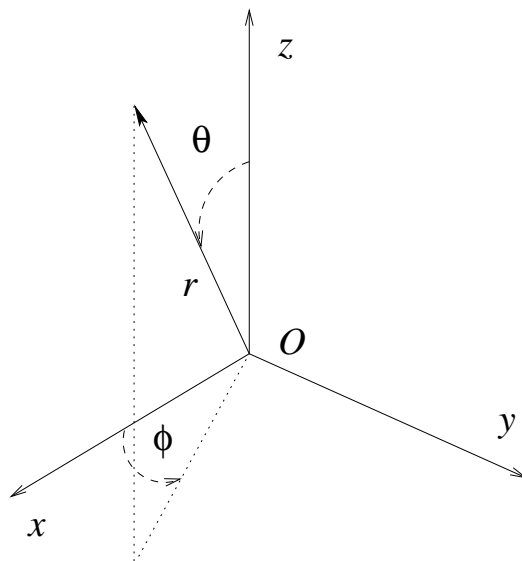


Fig. 10.3 Coordenadas esféricas

Como vamos a considerar la superficie esférica $r = R$. El elemento de superficie se puede encontrar con las técnicas explicadas en el apéndice II, pero aquí lo haremos con el siguiente razonamiento geométrico. Al variar ϕ el punto se desplaza sobre un paralelo. Al variar θ sobre un meridiano. El radio del paralelo es $r \sin \theta$. El arco de paralelo correspondiente a $d\phi$ es $r \sin \theta d\phi$. El arco de meridiano correspondiente a $d\theta$ es $r d\theta$. El elemento de superficie esférica es el producto de los dos arcos

$$dS = r \sin \theta d\phi r d\theta = R^2 \sin \theta d\theta d\phi .$$

Con este elemento de superficie podemos, por ejemplo, calcular el área total de la esfera

$$S = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta R^2 = 4\pi R^2 .$$

La densidad superficial de masa es $\sigma = M/(4\pi R^2)$. Calculemos el momento respecto al eje z . La distancia entre el punto de la superficie y el eje z es el radio del correspondiente paralelo $R \sin \theta$, resulta

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta R^2 (R \sin \theta)^2 \sigma \\ &= 2\pi \sigma R^4 \int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta \\ &= -2\pi \sigma R^4 \int_1^{-1} du (1 - u^2) \\ &= 2\pi \sigma R^4 \frac{4}{3} = \frac{2MR^2}{3} . \end{aligned}$$

En el cálculo del integral se hizo el cambio de variable $u = \cos \theta$.

(8) Esfera de radio R y masa M . Podríamos usar coordenadas esféricas para hacer el integral de volumen, pero para ilustrar otro tipo de técnica vamos a usar el resultado de la concha esférica. Suponemos la esfera subdividida en conchas de radio r y espesor dr . La concha de radio r tiene una masa dm . El volumen de la esfera es $4/3\pi R^3$ por lo que la densidad es

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3},$$

el volumen de la concha es

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

y la masa

$$dm = \rho dV = \rho 4\pi r^2 dr = \frac{3M}{R^3} r^2 dr.$$

Como los momentos de inercia son aditivos no queda sino integrar los momentos de las conchas

$$I = \int \frac{2}{3} r^2 dm = \frac{2M}{R^3} \int_0^R r^4 dr = \frac{2MR^2}{5}.$$

Movimiento con punto fijo. Péndulo físico

Si el cuerpo rígido puede rotar alrededor de un punto C del cuerpo, el movimiento está determinado por la ecuación del torque respecto al punto C

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{\tau}_C^{(e)} \quad (190)$$

y el momento angular \vec{L}_C es

$$\vec{L}_C = \vec{I}_C \cdot \vec{\omega}.$$

La solución del caso general es complicada porque el tensor momento de inercia es solidario con el cuerpo, o sea que rota con este. Sin embargo es mucho lo que se puede deducir de la ecuación (190). Como ejemplo consideremos el caso de la bailarina de ballet de la figura 10.4, que gira en punta de pie, primero con una pierna y los brazos extendidos horizontalmente y luego con los piernas unidas y los brazos sobre la cabeza. En ambas posiciones la bailarina se coloca de manera que un eje principal de inercia sea vertical, por lo que ambos \vec{L} y $\vec{\omega}$ son verticales. Las fuerzas externas que actúan sobre la bailarina son su peso y la reacción del piso. Con respecto al punto de apoyo la reacción del piso tiene torque nulo, por lo que el torque externo total es el debido al peso. Como el peso es vertical su torque no tiene componente vertical y, por la ecuación de movimiento, la componente vertical del momento angular se conserva, aún durante el movimiento que hace la bailarina para pasar de una posición a la otra. El momento de inercia de la posición inicial, con brazos y pierna extendidos, es mucho mayor que el de la posición final por lo que la velocidad angular final será mucho mayor que la inicial. En realidad la conservación de la componente vertical de \vec{L} es sólo aproximada. Esto es debido a que no es cierto que la bailarina esté apoyada en un solo punto, sino que se apoya en toda una zona. Esto hace que las fuerzas de fricción produzcan un pequeño torque en la dirección vertical que tiende a parar la rotación.

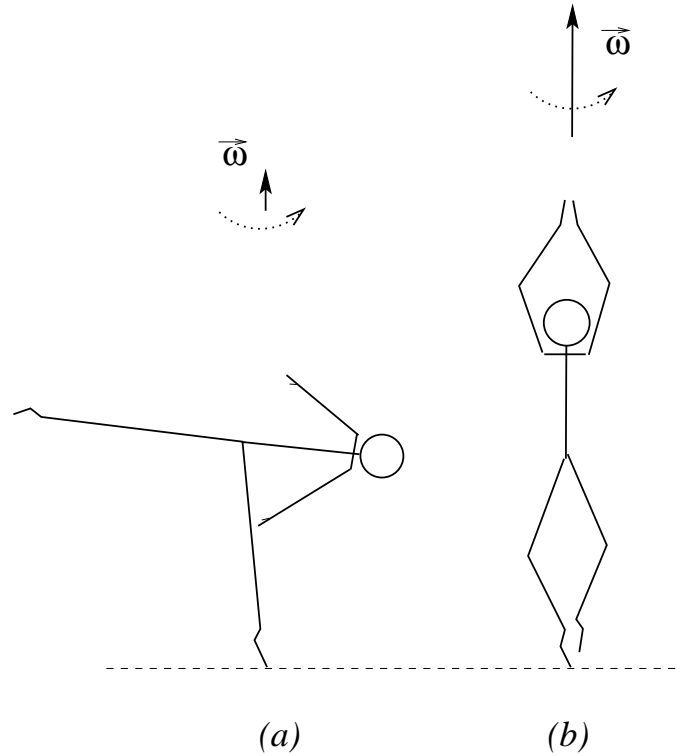


Fig. 10.4 Bailarina de ballet

(a) Bailarina rotando con una pierna y los brazos extendidos horizontalmente, (b) La bailarina disminuye el momento de inercia acercando piernas y brazos al cuerpo, por lo que aumenta la velocidad de rotación.

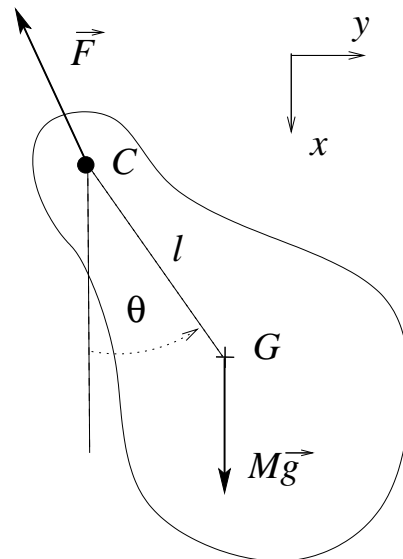


Fig. 10.5 Péndulo físico

La ecuación (190) se simplifica mucho cuando el cuerpo está vinculado a rotar en un eje fijo, que supondremos en la dirección z . La velocidad angular se mantiene paralela al eje z ,

$\vec{\omega} = \omega \hat{k}$. Para el movimiento sólo es relevante la componente z de la ecuación

$$\frac{dL_z}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} = \tau_z . \quad (191)$$

Como ejemplo estudiemos el péndulo físico, que es simplemente un cuerpo que cuelga de un punto C . Supondremos que exista un eje principal de inercia que pasa por C y es perpendicular a la línea que va de C al centro de masas G . Estudiaremos movimientos que mantienen a dicho eje fijo en un plano horizontal. Se hará coincidir el eje z con el eje de rotación (véase la figura 10.5). Sean l la distancia entre el eje y centro de masas, R_g el radio de giro respecto al eje paralelo a z que pasa por G y θ el ángulo entre la vertical y el vector \vec{CG} . El momento de inercia respecto al eje es $I = M(l^2 + R_g^2)$ y la velocidad angular

$$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt} \hat{k} .$$

Las únicas fuerzas que actúan sobre cuerpo son la fuerza \vec{F} que sostiene el cuerpo y que está aplicada en C y el peso $M\vec{g}$. La fuerza \vec{F} no produce torque respecto a C , por lo que el torque total es el del peso. Tenemos $\vec{CG} = l(\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j})$ y $\vec{g} = g\hat{i}$ por lo tanto el torque del peso es

$$\vec{\tau} = l(\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) \times Mg\hat{i} = -Mgl \sin \theta \hat{k}$$

La ecuación del movimiento (191) se reduce en este caso a

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{gl}{l^2 + R_g^2} \sin \theta .$$

La ecuación es semejante a la del péndulo simple, pero con una frecuencia angular de oscilación diferente, $\Omega = \sqrt{gl/(l^2 + R_g^2)}$ en vez de $\Omega = \sqrt{g/l}$. Como era de esperarse si ponemos $R_g = 0$ obtenemos el resultado correspondiente al péndulo simple.

Rueda desbalanceada

Consideremos una rueda, que es cuerpo rígido con un eje de revolución, que naturalmente es un eje principal de inercia, cuyo momento de inercia llamaremos I_3 y cuyo versor será \hat{e}_3 . Los otro dos ejes son perpendiculares y tendrán el mismo momento de inercia $I_1 = I_2$. Típicamente $I_3 > I_1$. La rueda está vinculada a rotar en un eje que pasa por su centro, pero está desbalanceada, esto es, el eje de rotación no coincide con el eje de simetría, sino que forma un ángulo θ con este último. Véase la figura 10.6.

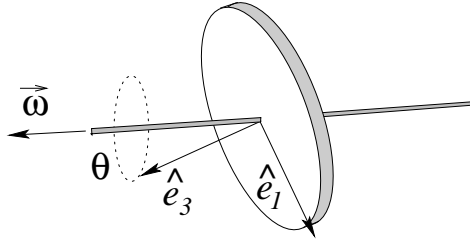


Fig. 10.6 Rueda desbalanceada

Vamos a suponer que la rueda rota con velocidad angular constante $\vec{\omega}$. La componente del momento angular en la dirección del eje de rotación es constante, pero en general \vec{L} tiene componentes perpendiculares al eje que rotan con velocidad angular $\vec{\omega}$. Veamos el asunto en detalle. Llamemos \hat{e}_1 el versor del eje principal perpendicular al eje de simetría que se encuentra en el plano formado por este eje y el eje de rotación. En la base de los ejes principales de inercia $\{\hat{e}_k\}$ la velocidad angular se expresa como

$$\vec{\omega} = \omega(-\sin\theta\hat{e}_1 + \cos\theta\hat{e}_3)$$

mientras que el tensor de momento de inercia es

$$\overleftrightarrow{I} = I_1(\hat{e}_1\hat{e}_1 + \hat{e}_2\hat{e}_2) + I_3\hat{e}_3\hat{e}_3 .$$

El momento angular es entonces

$$\vec{L} = \overleftrightarrow{I} \cdot \vec{\omega} = \omega(-I_1 \sin\theta\hat{e}_1 + I_3 \cos\theta\hat{e}_3) .$$

Los versores $\{\hat{e}_k\}$ son solidarios con el cuerpo, por lo que rotan con velocidad angular $\vec{\omega}$

$$\frac{d\hat{e}_k}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e}_k .$$

En consecuencia el momento angular no es constante; su derivada temporal será

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{L} = (I_3 - I_1)\omega^2 \cos\theta \sin\theta\hat{e}_2 .$$

Como debe valer la ecuación del torque (190) encontramos que para que la rueda rote con velocidad angular constante, como impone el vínculo, el eje debe ejercer un torque

$$\vec{\tau} = (I_3 - I_1)\omega^2 \cos\theta \sin\theta\hat{e}_2$$

sobre la rueda, o lo que es equivalente, los soportes del eje deben ejercer ese torque sobre el eje. Nótese que el torque es proporcional a ω^2 . De allí la importancia de que las partes que rotan a alta velocidad en un dispositivo mecánico estén bien balanceadas.

Movimiento con translación. Cuerpo rodante

Cuando un cuerpo rígido rota y se traslada necesitamos la ecuación del movimiento del centro de masas (57)

$$M\vec{a}_G = \vec{F}^{(e)}$$

y la del torque respecto al centro de masas

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{\tau}_G. \quad (192)$$

Como ejemplo consideremos una rueda de radio R , momento de inercia I y masa M que rueda sobre un plano horizontal arrastrada por una fuerza horizontal \vec{F} aplicada en su eje como se muestra en la figura 10.7.

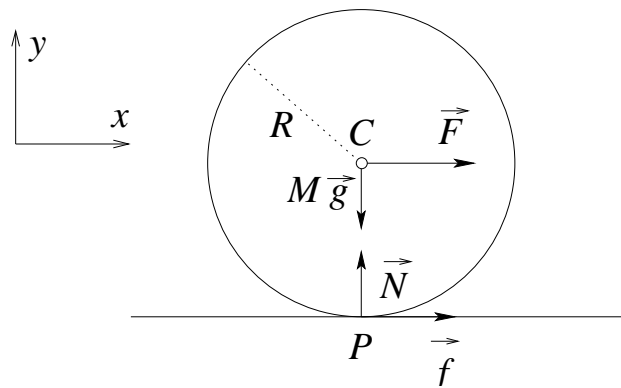


Fig. 10.7 Rueda en un plano horizontal

Entre la rueda y el piso hay un coeficiente de roce estático μ_e y uno dinámico μ_d . El centro de la rueda está vinculado a moverse en la dirección x ,

$$\vec{v}_C = v_x \hat{x}$$

y la rueda rota alrededor del eje z

$$\vec{\omega} = \omega_z \hat{z}.$$

Las fuerzas que actúan sobre la rueda son: 1) la fuerza de arrastre $\vec{F} = F\hat{x}$ aplicada sobre el centro C , 2) el peso $M\vec{g} = -Mg\hat{y}$, 3) la reacción normal del piso $\vec{N} = N\hat{y}$ y 4) la fricción $\vec{f} = f_x\hat{x}$. Estas dos últimas están aplicadas en el punto de contacto P . La única fuerza que tiene torque alrededor del centro C es la fricción

$$\vec{\tau} = \vec{CP} \times \vec{f} = -R\hat{y} \times f_x\hat{x} = Rf_x\hat{z}.$$

La rotación está determinada por la ecuación del torque respecto al centro de masas (192)

$$I \frac{d\omega_z}{dt} = Rf_x$$

y el movimiento de translación está determinado por la 2ª ley de Newton

$$M\vec{a}_C = \vec{F} + M\vec{g} + \vec{N} + \vec{f}.$$

Capítulo 10: Dinámica de cuerpo rígido

Las componentes vertical y horizontal de esta ecuación son

$$0 = N - Mg$$

y

$$Ma_x = F + f_x .$$

Las dos ecuaciones de movimiento están relacionadas porque la fuerza de fricción f_x depende de la velocidad del punto de contacto P

$$\vec{v}_P = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{CP} = (v_x + \omega_z R)\hat{x} .$$

Hay dos situaciones cualitativamente diferentes: rodadura *sin* deslizamiento y rodadura *con* deslizamiento. En el primer caso se cumple continuamente $\vec{v}_p = 0$. Como no hay movimiento relativo entre las superficies del piso y de la rueda este caso corresponde al rozamiento estático. La fricción f_x tiene el valor necesario para que se satisfaga el vínculo

$$R\omega_z = -v_x .$$

Los movimientos de rotación y translación están acoplados. Podemos utilizar la ecuación del torque para determinar el valor de f_x

$$f_x = \frac{I}{R} \frac{d\omega_z}{dt} = -\frac{I}{R^2} a_x$$

para substituirlo luego en la ecuación de la translación

$$Ma_x = F - \frac{I}{R^2} a_x .$$

Despejando obtenemos a_x en función de F

$$a_x = \frac{F}{M(1 + \frac{I}{MR^2})} .$$

La fuerza de tracción F no puede ser arbitrariamente grande por que la fricción debe cumplir con la condición del rozamiento estático $|f_x| < \mu_e N$. Es decir la rodadura sin deslizamiento sólo es posible si

$$F < \mu_e Mg(1 + MR^2/I) .$$

Trataremos ahora el caso de la rodadura con deslizamiento. Para simplificar supondremos que F sea constante. Los dos movimientos, translación y rotación están desacoplados. Cuando hay deslizamiento la magnitud de la fricción es $\mu_d N$ pero el signo de f_x es siempre contrario al de v_{Px}

$$f_x = -\mu_d Mg \text{sign}(v_x + R\omega_z)$$

Supongamos que inicialmente ($t = 0$) la velocidad del centro sea v_{x0} y la velocidad angular ω_{z0} . Hay tres casos posibles

1) $v_{x0} + R\omega_{z0} < 0$. El roce es $f_x = \mu_d Mg$, la velocidad angular

$$\omega_z = \omega_{z0} + \frac{\mu_d MgR}{I}t,$$

la velocidad del centro

$$v_x = v_{x0} + (F/M + \mu_d g)t$$

y la velocidad del punto de contacto

$$v_{Px} = v_{x0} + R\omega_{z0} + [F/M + \mu_d g(1 + MR^2/I)]t.$$

La rapidez de punto de contacto disminuye constantemente y en algún momento se anula.

2) $v_{x0} + R\omega_{z0} > 0$, la velocidad angular

$$\omega_z = \omega_{z0} - \frac{\mu_d MgR}{I}t,$$

la velocidad del centro

$$v_x = v_{x0} + (F/M - \mu_d g)t$$

y la velocidad del punto de contacto

$$v_{Px} = v_{x0} + R\omega_{z0} + [F/M - \mu_d g(1 + MR^2/I)]t.$$

La velocidad de P disminuye solamente si

$$F < \mu_d Mg(1 + MR^2/I)$$

en el cual caso después de un cierto tiempo se anula.

3) $v_{x0} + R\omega_{z0} = 0$. Lo que pasa posteriormente depende de la magnitud de F . Si $F \leq \mu_d Mg(1 + MR^2/I)$ la rueda sigue rodando sin deslizarse. Si

$$\mu_d Mg(1 + MR^2/I) < F \leq \mu_e Mg(1 + MR^2/I)$$

la rodadura sin deslizamiento es posible pero inestable; matemáticamente ambas soluciones son posibles. Finalmente si $\mu_e Mg(1 + MR^2/I) < F$ el punto de contacto se desliza con velocidad positiva creciente.

Trabajo y energía cinética del cuerpo rígido

Consideremos un sistema rígido con partículas en las posiciones P_k sobre las que están aplicadas fuerzas \vec{F}_k . Sea C el punto que usamos para determinar la translación y $\vec{v}_k = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{CP}_k$ la velocidad de la partícula k -ésima. La potencia total de las fuerzas que actúan sobre el sistema es

$$P = \sum_k \vec{v}_k \cdot \vec{F}_k = \sum_k (\vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{CP}_k) \cdot \vec{F}_k = \vec{v}_C \cdot \sum_k \vec{F}_k + \vec{\omega} \cdot \sum_k \vec{CP}_k \times \vec{F}_k = \vec{v}_C \cdot \vec{F}^{(e)} + \vec{\omega} \cdot \vec{\tau}_C^{(e)} .$$

Aquí usamos el teorema 40 del capítulo 2. Multiplicando por el diferencial de tiempo dt , obtenemos el diferencial de trabajo

$$dW = \vec{F}^{(e)} \cdot d\vec{l} + \vec{\tau}_C^{(e)} \cdot d\vec{\varphi} \quad (193)$$

donde $d\vec{l} = \vec{v}_C dt$ es el desplazamiento del punto C , $d\vec{\varphi} = \vec{\omega} dt$ el ángulo rotado, $\vec{F}^{(e)}$ la fuerza externa total y $\vec{\tau}_C^{(e)}$ el torque externo total alrededor de C .

Calculemos la energía cinética total del sistema

$$\begin{aligned} E_K &= \sum_k \frac{1}{2} m_k (\vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{CP}_k)^2 \\ &= \sum_k \frac{1}{2} m_k (V_C^2 + 2\vec{\omega} \times \vec{CP}_k \cdot \vec{v}_C + (\vec{\omega} \times \vec{CP}_k)^2) \\ &= \frac{1}{2} M v_C^2 + M \vec{\omega} \times \vec{CG} \cdot \vec{v}_C + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \sum_k m_k \vec{CP}_k \times (\vec{\omega} \times \vec{CP}_k) \\ &= \frac{1}{2} M v_C^2 + M \vec{\omega} \times \vec{CG} \cdot \vec{v}_C + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_C . \end{aligned}$$

$\vec{L}_C = \overset{\leftrightarrow}{I}_C \cdot \vec{\omega}$ es el momento angular de *rotación* alrededor del punto C . Hay dos casos en los que la fórmula se simplifica notablemente, uno es cuando el punto C es fijo ($\vec{v}_C = 0$) y solamente hay energía de rotación

$$E_K = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_C = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \overset{\leftrightarrow}{I}_C \cdot \vec{\omega} . \quad (194)$$

El otro caso es cuando el punto es el centro de masas $C \equiv G$

$$E_K = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_G . \quad (195)$$

La energía cinética resulta la suma de la energía cinética de translación del centro de masas más la energía de rotación alrededor del mismo.

Para el cuerpo rígido vale el teorema del trabajo-energía cinética

$$W_{AB} = \Delta E_K ,$$

donde el trabajo se obtiene integrando (193).

Regla de oro de las máquinas simples

Las máquinas simples (poleas, palancas, planos inclinados, engranajes, etc.) son dispositivos que permiten cambiar la magnitud y dirección de las fuerzas. Sobre la máquina actúan dos fuerzas, la fuerza que se pretende balancear es la *resistencia* y la que se aplica con ese propósito es la *potencia*. Típicamente la potencia y la resistencia están aplicadas a partes móviles acopladas, de tal suerte que cuando se produce un desplazamiento de la potencia se produce un desplazamiento correspondiente de la resistencia. Como la máquina simple, ni absorbe ni cede energía, su energía no cambia por lo que

Regla de oro. *El trabajo de la potencia es opuesto al trabajo de la resistencia.*

En otras palabras, lo que se gana en la magnitud de la fuerza se pierde en el desplazamiento, de manera que el valor absoluto del trabajo es el mismo. Se puede determinar el factor de amplificación de la fuerza estudiando la relación entre los recorridos.

Movimiento en campo gravitacional constante

El movimiento de un cuerpo rígido en un campo gravitatorio constante es particularmente simple. Como el torque del peso con respecto a un punto cualquiera es igual al torque de una masa puntual colocada en el centro de masas G , el torque del peso con respecto al centro de masas es nulo, por lo que la ecuación del momento angular (192) resulta

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = 0,$$

o sea que el momento angular respecto a G se conserva. Por otra parte la 2ª ley de Newton aplicada al sistema es igual a la de una partícula puntual colocada en el centro de masas. *El centro de masas se mueve como una partícula en caída libre.* En este caso los movimientos de translación y rotación están desacoplados, por eso se conservan separadamente la energía de la rotación y la mecánica del centro de masas. El momento angular es constante, pero, a menos que su dirección no coincida con un eje principal, $\vec{\omega}$ no lo es. La rotación en general es complicada, pero por la conservación de la energía de rotación el producto escalar $\vec{\omega} \cdot \vec{L}_G$, es constante, lo que implica que la componente de $\vec{\omega}$ en la dirección de \vec{L}_G sí se conserva.

Estos resultados son aproximadamente válidos para cuerpos que se muevan en campos gravitatorios que varíen poco en distancias del orden de sus dimensiones. Por ejemplo un planeta girando alrededor del Sol; el centro de masas del planeta se mueve en la órbita elíptica mientras que el planeta rota alrededor de su eje conservándose el momento angular propio.

Fuerzas de marea

Cuando la no-uniformidad de los campos gravitacionales es grande aparecen las fuerzas de *marea*. Para fijar las ideas consideremos un campo gravitacional central producido por una masa M_0 que actúa sobre un cuerpo extendido de masa M ,

$$\vec{g} = -\frac{GM_0}{r^2}\hat{r},$$

$$\vec{F} = \int \vec{g} dm,$$

$$\vec{\tau} = \int \vec{r} \times \vec{g} dm = 0.$$

El torque respecto al centro de fuerzas se cancela exactamente, por lo que el momento angular total $\vec{r}_G \times \vec{P} + \vec{L}_G$ se conserva; \vec{r}_G es la posición del centro de masas.

Definiendo $\vec{g}_G = \vec{g}(\vec{r}_G)$, $\delta\vec{g} = \vec{g} - \vec{g}_G$ y $\delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_G$ se obtiene haciendo una expansión de primer orden

$$\delta\vec{g} \approx \frac{GM_0}{r_G^3}(3\hat{r}_G\hat{r}_G \cdot \delta\vec{r} - \delta\vec{r}). \quad (196)$$

La fuerza de marea sobre el elemento de masa dm es $\delta\vec{g} dm$. Las partes del cuerpo más lejanas del centro de la fuerza son atraídas menos que las cercanas. En primer orden el efecto total de las fuerzas de marea se cancela

$$\vec{F} = M\vec{g}_G$$

porque

$$\int \delta\vec{r} dm = 0.$$

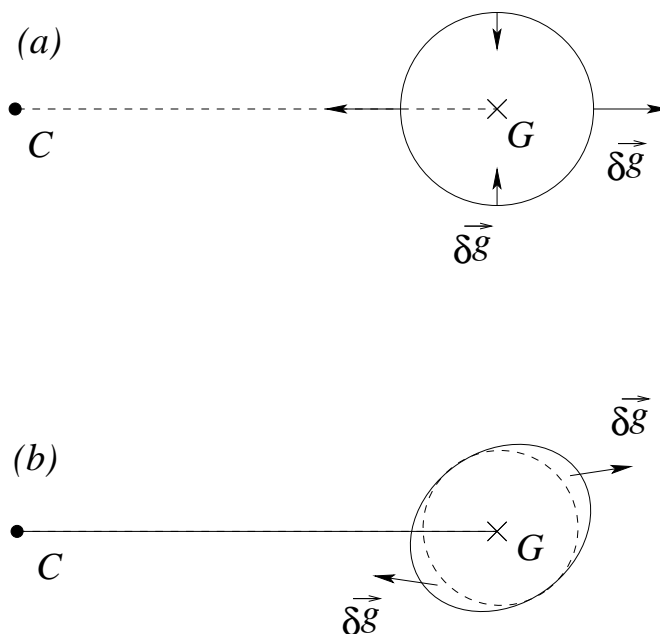


Fig. 10.8 Fuerzas de marea

- (a) Las fuerzas de marea halan al cuerpo en la dirección radial y lo comprimen tansversalmente.
- (b) El torque de las fuerzas de marea sobre un cuerpo alargado tiende a orientar el cuerpo con el alargamiento paralelo a la dirección radial.

Con respecto a un marco de referencia no-inercial fijo en G la fuerza aparente cancela la fuerza gravitatoria total, lo que queda son las fuerzas de marea. Estas producen tensiones en el cuerpo, estirándolo en la dirección radial y comprimiéndolo perpendicularmente. Estas fuerzas son las que producen las mareas en la Tierra. Hay mareas debido a la atracción de la Luna y a la atracción del Sol. Las fuerzas de marea solares son aproximadamente la mitad de las lunares. Las fuerzas de marea pueden ser muy importantes, por ejemplo se atribuye la actividad volcánica de la luna Io de Júpiter a las deformaciones producidas por las fuerzas de marea. El cometa Shoemaker-Levy 9, que cayó sobre Júpiter en 1994, se fracturó en unos 20 pedazos debido a las intensas fuerzas de marea.

El torque respecto a centro de masas G se puede calcular usando (196)

$$\vec{\tau}_G = \int \delta\vec{r} \times \vec{g} dm = \int \delta\vec{r} \times \delta\vec{g} dm \approx \frac{3GM_0}{r_G^3} \int \delta\vec{r} \times \hat{r}_G \hat{r}_G \cdot \delta\vec{r} dm .$$

En general este torque depende de la forma y orientación del cuerpo. Si el cuerpo es perfectamente esférico el torque se anula. Si el cuerpo es alargado el torque se anula cuando el alargamiento está en la dirección radial. En otras orientaciones el torque no se anula, lo que produce un cambio del momento angular propio

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{\tau}_G .$$

Como el momento angular total se conserva esto implica que el momento angular orbital sufre el cambio opuesto. El movimiento orbital está por lo tanto acoplado con el movimiento de revolución alrededor del eje. Si el alargamiento se mantiene en la dirección radial, lo que implica que la velocidad angular de revolución sea igual a la de la órbita, los momentos angulares se conservan porque los torques son cero. Esto es lo que sucede con la Luna, que siempre presenta la misma cara a la Tierra. Probablemente en un lejano pasado no era así, pero los torques producidos por las deformaciones de la Luna, debidas a las fuerzas de marea, fueron modificando la velocidad angular de revolución de la Luna hasta hacerla igual a la velocidad angular orbital. Se ha observado una pequeña variación de la duración del día sideral que es debida a las fuerzas de marea que actúan sobre la Tierra.

Efecto giroscópico. Trompo

Cuando a un cuerpo que no rota se le aplica un torque se produce una rotación alrededor de un eje paralelo al torque. La situación es diferente cuando se aplica un torque a un cuerpo que rota rápidamente alrededor de un eje. Si el torque aplicado es perpendicular al momento angular \vec{L} lo que se produce es un cambio en la dirección del eje de rotación, o sea el eje precesa. Este efecto es importante en la estabilidad de la bicicleta. Otro ejemplo típico es el trompo. Todos sabemos que mientras gire con suficiente velocidad el trompo no se cae sino que el eje de rotación precesa alrededor de un eje vertical. Estudiemos el asunto en detalle. En la figura 10.9 está representado un trompo que gira con velocidad angular $\vec{\omega}$. El eje de rotación forma un ángulo θ con la vertical. Sea M la masa del trompo y I su momento de inercia respecto al eje de simetría. La punta del trompo se mantiene en el origen O . El centro de masas G se encuentra en el eje de simetría a una distancia l de la punta. Sobre el trompo actúan solamente el peso $M\vec{g}$ y la reacción del piso sobre la punta \vec{F} .

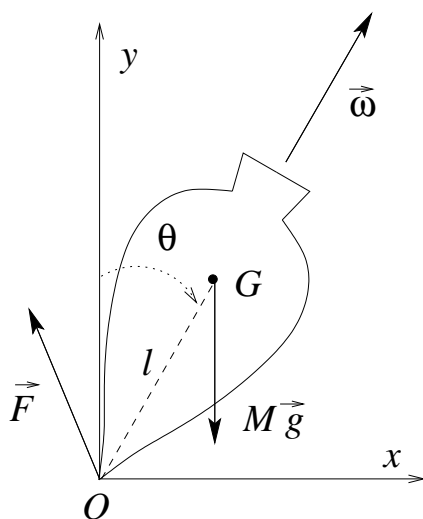


Fig. 10.9 Trompo

La posición del centro de masas es

$$\vec{OG} = l(\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y})$$

mientras que el momento angular es

$$\vec{L} \approx I\omega(\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y}) .$$

Sólo el peso produce un torque respecto al origen.

$$\vec{\tau} = l(\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y}) \times Mg(-\hat{y}) = -Mgl \sin \theta \hat{z} .$$

Sea $\vec{\Omega} = \Omega \hat{y}$ la velocidad angular de la precesión. la derivada de \vec{L} es

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L} = -I\Omega\omega \sin \theta \hat{z} .$$

Igualando con el torque

$$\Omega = \frac{Mgl}{I\omega} .$$

La aproximación es válida si $\omega \gg \Omega$ que implica

$$\omega \gg \sqrt{\frac{Mgl}{I}} .$$

Queda por determinar la fuerza \vec{F} . La 2ª ley de Newton

$$M\vec{a}_G = \vec{F} + m\vec{g}$$

se puede proyectar en los dos ejes. De la ecuación en y obtenemos

$$F_y = Mg$$

y de la ecuación en x , tomando en cuenta que G se mueve con movimiento circular de radio $l \sin \theta$ y velocidad angular $\Omega \hat{y}$, obtenemos

$$F_x = Ma_{Gx} = -M\Omega^2 l \sin \theta .$$

Apéndice I

Límites y Derivadas

Presentamos en este apéndice definiciones intuitivas de límite y derivada y un compendio de sus principales propiedades.

Límites

Consideremos una función $f(x)$, que pudiera no estar definida en $x = x_0$ pero sí en los puntos arbitrariamente cercanos. Si a medida que el valor de la variable se acerca a x_0 el valor de la función $f(x)$ se aproxima a un valor determinado v decimos que v es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 . Escribimos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = v .$$

Por ejemplo si $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ la función no está definida para $x = 1$, pero vale $x + 1$ en todos los otros puntos; entonces

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2 .$$

En otros casos el límite cuando la variable se aproxima al punto por la derecha es diferente que el límite cuando se aproxima por la izquierda, por ejemplo

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 .$$

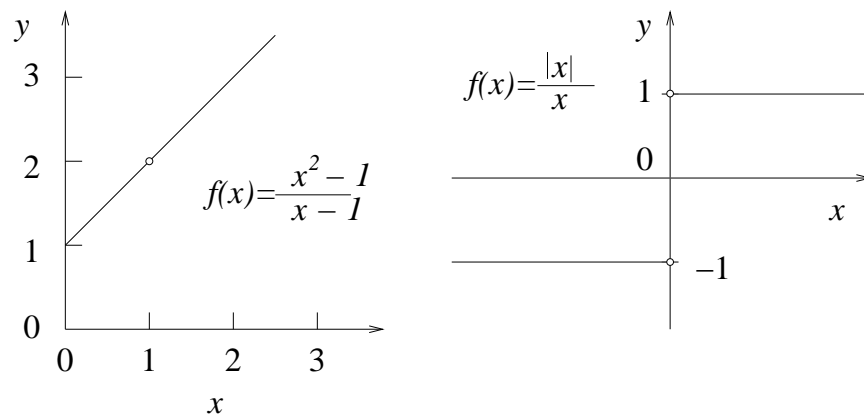


Fig. AI.1 Ejemplos de límites

En el primer caso el límite cuando x tiende a 1 es 2. En el segundo cuando x tiende a cero el límite por la izquierda es -1 y por la derecha es 1.

Hay casos en los que no hay límite ni por la izquierda ni por la derecha, por ejemplo la función $f(x) = \cos(1/x)$ a medida que x tiende a 0 oscila entre -1 y 1 y no tiene límite.

Se dice que una función $f(x)$ es **continua** en x_0 cuando el valor de la función en x_0 es igual al límite cuando x tiende a x_0 ,

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) .$$

La función definida como $f(x) = \cos(1/x)$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 0$, no es continua en $x = 0$. Sin embargo $g(x) = xf(x)$ si es continua en $x = 0$.

Hay funciones que no son continuas en ningún punto, como por ejemplo la función $f(x)$ definida como $f(x) = 1$ para $x \in \mathbb{Q}$ y $f(x) = 0$ para $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Listamos a continuación algunas propiedades de los límites.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (af(x) + bg(x)) = a \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + b \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) ,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

cuando ambos límites existan.

Si $g(x)$ es una función continua valen

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)f(x) = g(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) ,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g[f(x)] = g\left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right] ,$$

y

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = \lim_{y \rightarrow g(x_0)} f(y) .$$

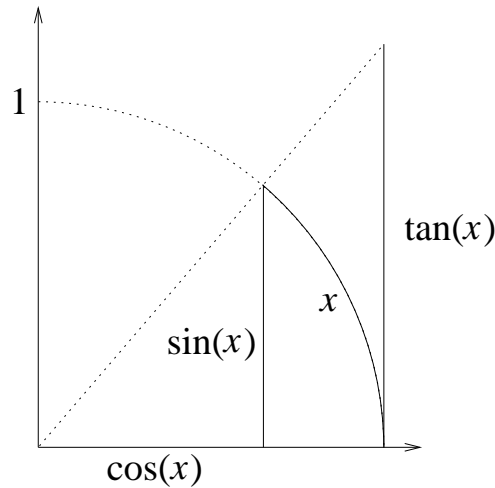


Fig. AI.2 Funciones trigonométricas en el círculo unitario

Como ejemplo calculemos el límite de $\sin(x)/x$ cuando x tiende a cero. Para $\pi/2 > x > 0$, como se ve en la figura AI.2, el arco en radianes x es mayor que el seno y menor que la tangente

$$\sin(x) < x < \tan(x) .$$

Dividiendo por x

$$\frac{\sin(x)}{x} < 1 < \frac{\sin(x)}{x} \frac{1}{\cos(x)}$$

de donde

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1 .$$

Como $\sin(x)/x$ y $\cos(x)$ son funciones pares la desigualdad vale también para $-\pi/2 < x < 0$. Como $\cos(x)$ es continua y $\cos(0) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 .$$

Derivada

Definición

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} .$$

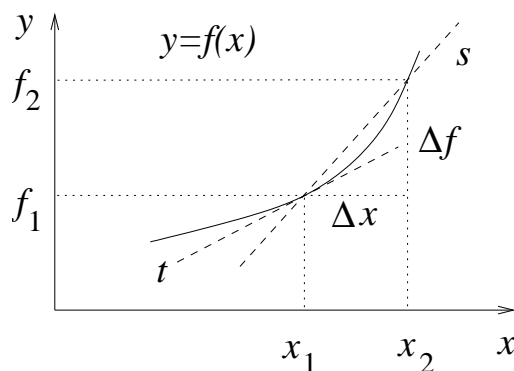


Fig. AI.3 Derivada de una función $f(x)$

A medida que x_2 se acerca a x_1 , la recta secante s que pasa por los puntos (x_1, f_1) y (x_2, f_2) se aproxima a la recta t tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $x = x_1$. La pendiente de la secante $\Delta f/\Delta x$ tiende a la pendiente de la tangente $f'(x_1)$, que es la derivada en x_1 .

Intuitivamente podemos pensar la derivada como la división del incremento infinitesimal de la función df entre el incremento infinitesimal correspondiente de la variable dx . Infinitesimal significa que hay un límite implícito, $dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x$, que se efectuará *después* de efectuar las operaciones con los incrementos infinitesimales. Los incrementos infinitesimales se denominan *diferenciales*.

Ecuación de la tangente a la curva $y = f(x)$ en un punto x_0

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) .$$

Aproximación lineal de una función.

Consiste en aproximar, en las cercanías de un punto, la curva con la tangente en el punto*

$$f(x + \delta) = f(x) + f'(x)\delta + \mathcal{O}(\delta^2) \approx f(x) + f'(x)\delta .$$

* El símbolo $\mathcal{O}(a^n)$ significa una expresión en la que el término de menor orden en a es a^n , o sea que $\lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{O}(a^n)/a^{n-1} = 0$.

Derivada segunda

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx} \frac{df(x)}{dx}.$$

Derivada de orden n

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{d}{dx} \frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}}.$$

Derivada de una constante

$$\frac{dc}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0.$$

Derivada de la variable

$$\frac{dx}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = 1.$$

Derivada de una combinación lineal

$$\frac{d}{dx}(af(x) + bg(x)) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{af(x + \Delta x) + bg(x + \Delta x) - af(x) - bg(x)}{\Delta x} = a \frac{df(x)}{dx} + b \frac{dg(x)}{dx}.$$

Derivada de un producto

$$\begin{aligned} \frac{d f(x)g(x)}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f(x + \Delta x) - f(x))g(x + \Delta x) + f(x)(g(x + \Delta x) - g(x))}{\Delta x} \\ &= \frac{df(x)}{dx} g(x) + f(x) \frac{dg(x)}{dx}. \end{aligned}$$

Derivada de un inverso

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{1}{f(x)} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{1}{f(x + \Delta x)} - \frac{1}{f(x)} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x + \Delta x)}{\Delta x f(x) f(x + \Delta x)} \\ &= - \frac{1}{f(x)^2} \frac{df(x)}{dx}. \end{aligned}$$

Derivada de una función compuesta. Regla de la cadena

$$\frac{df[g(x)]}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f[g(x + \Delta x)] - f[g(x)]}{g(x + \Delta x) - g(x)} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \frac{df[g(x)]}{dg} \frac{dg(x)}{dx}.$$

Derivada de la función inversa

$$\begin{aligned} f[f^{-1}(x)] = x &\implies \frac{df(y)}{dy} \Big|_{y=f^{-1}(x)} \frac{df^{-1}(x)}{dx} = 1 \\ \frac{df^{-1}(x)}{dx} &= \frac{1}{\frac{df(y)}{dy} \Big|_{y=f^{-1}(x)}}. \end{aligned}$$

Derivada de una potencia entera, $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{dx^n}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x^n + nx^n \Delta x + \mathcal{O}(\Delta x^2)) - x^n}{\Delta x} = nx^{n-1}.$$

Apéndice I: Límites y derivadas

Derivada de una potencia real $r \in \mathbb{R}$

$$\frac{dx^r}{dx} = rx^{r-1}.$$

Derivada de un exponencial de base a

$$\frac{da^x}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \frac{da^x}{dx} \Big|_{x=0}.$$

Por definición el número de Napier o de Euler e es aquel que cumple con

$$\frac{de^x}{dx} \Big|_{x=0} = 1.$$

El exponencial de base e es la única función que es igual a su derivada

$$\frac{de^x}{dx} = e^x.$$

Derivada del logaritmo neperiano, $y = \ln(x) \iff x = e^y$

$$\frac{d \ln(x)}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Derivada del seno

$$\frac{d \sin(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \cos(\Delta x) + \cos(x) \sin(\Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} = \cos(x)$$

aquí se usaron los límites

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} = 0.$$

Derivada del coseno

$$\frac{d \cos(x)}{dx} = \frac{d \sin(x + \pi/2)}{dx} = \cos(x + \pi/2) = -\sin(x).$$

Derivada de la tangente

$$\frac{d \tan(x)}{dx} = \frac{d \sin(x)}{dx \cos(x)} = \cos(x) \frac{1}{\cos(x)} - \sin(x) \frac{1}{\cos(x)^2} (-\sin(x)) = 1 + \tan(x)^2.$$

Ejemplo de derivada de una función compuesta

$$\frac{d}{dx} \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2} (1+x^2)^{1/2-1} \frac{d(1+x^2)}{dx} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Apéndice II

Integrales de Línea, Superficie y Volumen

Para varios tópicos de los cursos de Física básica, es necesario tener un cierto dominio de la integración en varias dimensiones, integrales dobles y triples. Lamentablemente, y quizás no pueda ser de otra manera, estas integrales son tratadas en cursos avanzados de matemáticas, que no podemos suponer que hayan sido tomados por los estudiantes. No nos queda otra que dar dentro del curso de Física una explicación somera e intuitiva del asunto, que le permita al estudiante seguir el discurso y resolver casos simples.

Integral de línea

Consideremos una curva \mathcal{C} entre los puntos A y B . La integral de línea de una función $f(P)$ cuyo argumento es un punto del espacio se define de una manera análoga que la integral en una dimensión. Se subdivide el arco de curva en segmentos de largo Δl_i , se calcula f en un punto interior del segmento P_i y la integral resulta

$$\int_{\mathcal{C}} f(P) dl = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \sum_i f(P_i) \Delta l_i .$$

El límite $\Delta l \rightarrow 0$ implica que el número de segmentos tiende a ∞ .

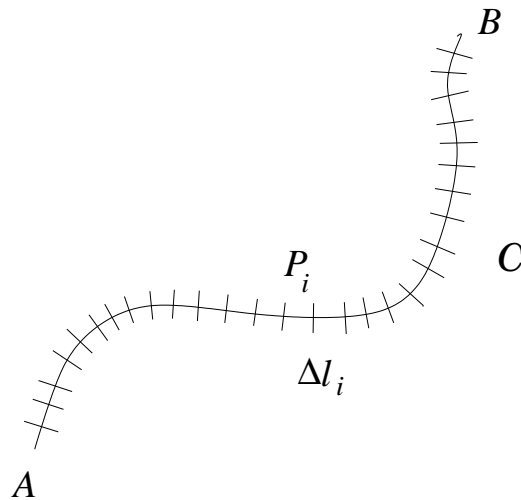


Fig. AII.1 Integral de línea

La curva \mathcal{C} se subdivide en segmentos de ancho Δl_i

Si conocemos una ecuación paramétrica de la curva la integral se reduce a una integral común respecto al parámetro,

$$\vec{OP}(u) = x(u)\hat{i} + y(u)\hat{j} + z(u)\hat{k}, \quad u_1 \leq u \leq u_2$$

Apéndice II: Integrales de línea, superficie y volumen

La longitud de arco infinitesimal dl , también llamada elemento de arco es

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \left| \frac{d\vec{OP}}{du} \right| du = \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2} du$$

y la integral de línea resulta

$$\int_C f(P) dl = \int_{u_1}^{u_2} f(P(u)) \left| \frac{d\vec{OP}}{du} \right| du .$$

Nótese que la integral es independiente del parámetro porque

$$\frac{d\vec{OP}}{dv} = \frac{d\vec{OP}}{du} \frac{du}{dv} .$$

También se usa un elemento de arco vectorial

$$d\vec{l} = \hat{t} dl = \frac{d\vec{OP}}{du} du$$

donde \hat{t} es el versor tangente a la curva. Este tipo de integral es el que aparece en la definición de trabajo, $dW = \vec{F} \cdot d\vec{l}$.

Integral en un plano

Consideremos una región s del plano xy . Subdividamos la región S en bandas verticales de ancho Δx_i y bandas horizontales de ancho Δy_j , de manera que la superficie queda subdividida en rectángulos de área $\Delta x_i \Delta y_j$. Se define la integral de superficie de una función del punto $f(P)$ como

$$\int_S f(P) dS = \int \int_S f(x, y) dx dy = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sum_{ij} f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j .$$

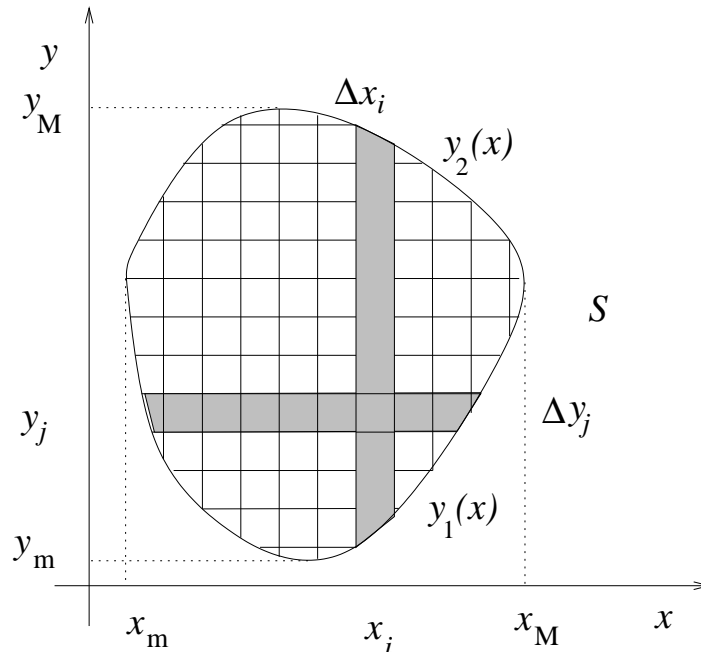


Fig. AII.2 Integral de superficie

La región S se subdivide en rectángulos de área $\Delta x_i \Delta y_j$

¿Cómo tratamos los rectángulos que interceptan el borde la región S ? Este es el tipo de detalle del que no nos ocupamos aquí; baste decir que hay dos maneras, o se omiten en la suma (área interior) o se consideran completos (área exterior); se supone que ambos límites den el mismo resultado.

La integral de superficie, o integral doble, se reduce a dos integraciones simples sucesivas. Si la región S es *convexa*, o sea sin entrantes, está limitada por dos curvas $(x, y_1(x))$ y $(x, y_2(x))$,

$$S = \{(x, y) \mid y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \text{ para } x_m \leq x \leq x_M\} .$$

Se pueden sumar primero las bandas verticales y luego la horizontales

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sum_i \Delta x_i \sum_j f(x_i, y_j) \Delta y_j = \int_{x_m}^{x_M} \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right] dx .$$

Análogamente se puede integrar primero respecto a x y luego respecto a y ; si

$$S = \{(x, y) \mid x_1(y) \leq x \leq x_2(y) \text{ para } y_m \leq y \leq y_M\}$$

tenemos

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \int_{y_m}^{y_M} \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \right] dy .$$

Si la región S no es convexa se subdivide en regiones que lo sean.

Cambio de coordenadas en el plano

En muchos casos es conveniente usar coordenadas diferentes a las cartesianas. Por ejemplo si la región de integración es un disco podría convenir usar las coordenadas polares r y θ . Siempre se puede definir una integral doble con respecto a las nuevas coordenadas, el problema consiste en que el área en el plano xy no se corresponde con el área en el plano de las nuevas coordenadas.

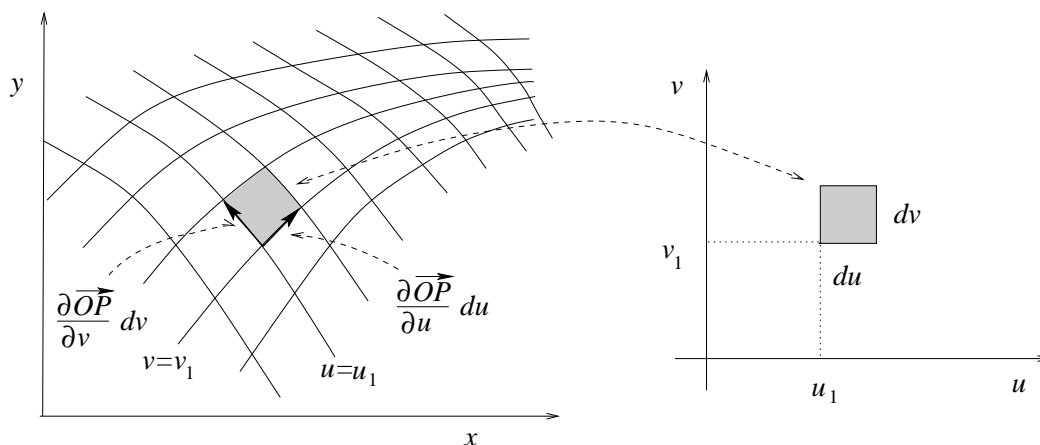


Fig. AII.3 Relación entre los diferenciales de superficie

El rectángulo $dudv$ del plano uv se corresponde a un paralelogramo en el plano xy .

Apéndice II: Integrales de línea, superficie y volumen

Veamos el asunto en detalle. Si tenemos unas coordenadas curvilíneas u y v el punto en el plano será función de ellas

$$\vec{OP}(u, v) = x(u, v)\hat{i} + y(u, v)\hat{j} .$$

Al desplazamiento diferencial du le corresponde el desplazamiento $(\partial\vec{OP}/\partial u)du$ en el plano xy , y al desplazamiento dv le corresponde $(\partial\vec{OP}/\partial v)dv$. El área del elemento de superficie en xy se puede calcular con el producto vectorial de los desplazamientos

$$dS = \left| \frac{\partial\vec{OP}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{OP}}{\partial v} \right| dudv .$$

El producto vectorial es

$$\frac{\partial\vec{OP}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{OP}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \hat{k} .$$

El determinante de las derivadas parciales se llama *Jacobiano* de la transformación (el nombre es en honor al matemático alemán Carl Gustav Jakob Jacobi). Su signo depende del orden de las variables; en la integración debemos usar el valor absoluto. Si a la región S del plano xy le corresponde una región U del plano uv tenemos

$$\int \int_S f(x, y) dx dy = \int \int_U f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial\vec{OP}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{OP}}{\partial v} \right| dudv .$$

Por ejemplo para las coordenadas polares (132) el Jacobiano vale

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

y

$$dS = dx dy = r dr d\theta .$$

El mismo resultado se obtiene calculando geoméricamente el área del elemento de superficie como se ve en la figura AII.4.

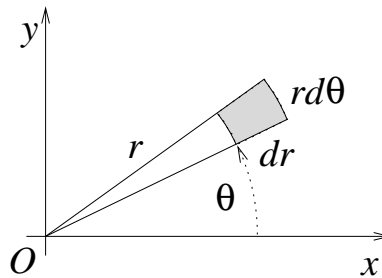


Fig. AII.4 Elemento de superficie en coordenadas polares

Integral en una superficie del espacio

Además de la integral en una región del plano también se puede definir una integral en una región de una superficie no plana, como por ejemplo de una esfera. El punto de una superficie del espacio depende de dos parámetros

$$\vec{OP}(u, v) = x(u, v)\hat{i} + y(u, v)\hat{j} + z(u, v)\hat{k} .$$

La situación es muy semejante a la de coordenadas curvilíneas en el plano. La diferencia es que ahora está la coordenada z . El elemento de superficie es

$$dS = \left| \frac{\partial \vec{OP}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{OP}}{\partial v} \right| dudv .$$

En algunos casos conviene definir un elemento de superficie vectorial dirigido en la dirección \hat{n} normal a la superficie,

$$d\vec{S} = \hat{n} dS = \frac{\partial \vec{OP}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{OP}}{\partial v} dudv .$$

Integral de volumen, cambio de coordenadas

En la definición de la integral de volumen en una región V del espacio, se sigue un método análogo al de las integrales dobles. Se subdivide la región en paralelepípedos rectángulos de volumen $\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$ y se suman los productos de la función por los volúmenes

$$\int_V f(P) dV = \int \int \int_V f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \sum_{ijk} f(x_i, y_j, z_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k .$$

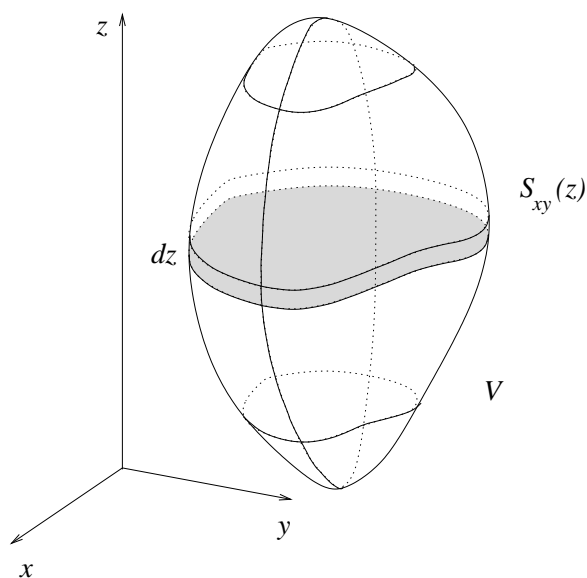


Fig. AII.5 Integral de volumen

La integral de volumen se puede calcular efectuando la integral doble en la intersección de V con el plano de coordenada z seguida por una integración en z .

Apéndice II: Integrales de línea, superficie y volumen

La integral triple se puede calcular efectuando una integral doble seguida de una simple

$$\int_V f(P) dV = \int_{z_m}^{z_M} \left[\int \int_{S_{xy}(z)} f(x, y, z) dx dy \right] dz .$$

Cuando se usa coordenadas curvilíneas u, v y w

$$\vec{OP}(u, v, w) = x(u, v, w)\hat{i} + y(u, v, w)\hat{j} + z(u, v, w)\hat{k}$$

hay que usar el correspondiente elemento de volumen

$$dV = \left| \frac{\partial \vec{OP}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{OP}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \vec{OP}}{\partial w} \right| du dv dw .$$

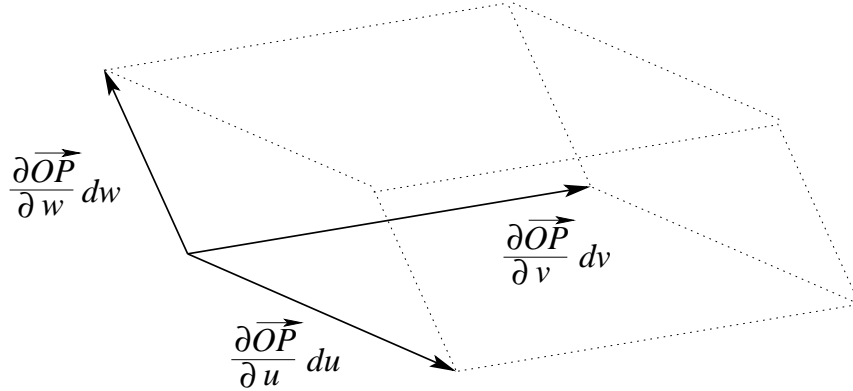


Fig. AII.6 Elemento de volumen en coordenadas curvilíneas

En este caso el producto mixto corresponde al Jacobiano de la transformación

$$\frac{\partial \vec{OP}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{OP}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \vec{OP}}{\partial w} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} .$$

Como ejemplo consideremos el caso de las coordenadas esféricas definidas por las ecuaciones (189) del capítulo 10. Las derivadas son

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\theta, \phi, r)} = \begin{bmatrix} r \cos \theta \cos \phi & r \cos \theta \sin \phi & -r \sin \theta \\ -r \sin \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi & 0 \\ \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \end{bmatrix}$$

el jacobiano es

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\theta, \phi, r)} \right| = r^2 \sin \theta$$

y el elemento de volumen

$$dV = r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr .$$

Índice General

Prólogo	3
Capítulo 1. Introducción a la Física	4
La Física y las otras ciencias	4
Teoría y experimento	5
Teorías generales de la Física	6
Interacciones fundamentales	7
Ramas de la Física según el sistema estudiado	9
Magnitudes físicas, unidades y dimensiones	9
Como escribir y manipular correctamente las fórmulas físicas	12
Capítulo 2. Tiempo, espacio, geometría, vectores	14
Tiempo	14
Longitud, marco de referencia y espacio	15
La geometría del espacio físico	15
Vectores geométricos	17
Desplazamientos	19
Producto de un vector por un número	20
Suma de vectores	21
Espacios vectoriales	22
Independencia lineal	22
Coordenadas cartesianas oblicuas	23
Ecuaciones paramétricas de una recta	25
Ecuaciones paramétricas de un plano	25
Cambio de base	26
Propiedades afines y propiedades métricas del espacio	26
Coordenadas cartesianas ortonormales	27
Componente de un vector sobre un eje. Producto escalar	28
Descomposición de un vector	31
Producto vectorial	31
Componente perpendicular y producto vectorial	33
Sistemas de coordenadas derechos e izquierdos	34
Producto triple	35
Ecuación implícita de un plano	36
Distancia entre dos rectas del espacio	37
Cambios de bases ortonormales	37
Magnitudes físicas escalares y vectoriales	38
Transformaciones activas y pasivas. Inversión espacial	38
Vectores polares y vectores axiales. Escalares impares	39
Pseudovectores y pseudoescalares	39
Capítulo 3. Cinemática	40
Marco de referencia y sistema de coordenadas	40

Índice general

Trayectoria y ley horaria	41
Velocidad escalar media	42
Velocidad escalar instantánea	42
Aceleración escalar	43
Movimiento uniforme	44
Movimiento uniformemente acelerado	44
Movimiento oscilatorio armónico simple	45
El problema inverso	45
Propiedades de las integrales	47
Propiedades de las integrales indefinidas	48
Vectores velocidad y aceleración	48
Movimiento con aceleración constante	49
Propiedades locales de la trayectoria	50
Curvatura de una circunferencia	52
Relación entre el vector velocidad y la velocidad escalar	53
Componentes de la aceleración	53
Cambios de marco de referencia	54
Movimiento circular	55
Un ejemplo 3D: Movimiento helicoidal	56
Un ejemplo 2D: La cicloide	57
Capítulo 4. Dinámica	59
El principio de inercia de Galileo Galilei	59
Sistemas de referencia inerciales y 1ª ley de Newton	60
Fuerza, peso, dinamómetro	63
Masa inercial y 2ª ley de Newton	64
Relatividad de Galileo	64
Fuerzas aparentes	65
Acción y reacción. 3ª ley de Newton	65
Cantidad de movimiento e impulso	66
Centro de masas de un sistema	66
Fuerzas internas	67
Dinámica de un sistema. Conservación de la cantidad de movimiento	68
Validez de las leyes de Newton	68
Fuerza de gravedad	69
Gravitación universal	69
Distribución esférica de masas	71
Experimentos de Cavendish y Eötvös	71
Cohete	73
Fuerzas de una cuerda ideal	74
Fuerzas de contacto. Fricción seca	74
Fricción fluida	76
Fuerzas elásticas. Ley de Hooke	76
Un ejemplo: Plano inclinado con roce	77
Capítulo 5. Trabajo y energía	80
Potencia de una fuerza	80

Trabajo de una fuerza	80
Energía cinética	80
Teorema del trabajo y la energía cinética	80
El trabajo como integral de línea	81
Fuerzas conservativas y energía potencial	82
Conservación de la energía	82
Consideraciones sobre la conservación de la energía	83
Energía potencial de una fuerza constante. Peso	83
Fuerza correspondiente a una energía potencial. Gradiente	84
Condición necesaria para que una fuerza sea conservativa	85
Energía potencial de la fuerza de un resorte	85
Energía potencial de una fuerza central	86
Energía potencial de la gravedad	87
Estudio de gráficos $U(x)$ contra x	88
Integración de la ecuación de la energía en una dimensión	89
Choques	90
Un ejemplo: Rampa con rizo	91
Capítulo 6. Oscilaciones	92
Oscilador armónico	92
Energía del oscilador armónico	94
Solución de la ecuación usando conservación de la energía	95
Oscilaciones pequeñas	95
Péndulo simple:ecuación del movimiento	96
Péndulo simple:energía	97
Oscilador con fricción fluida	98
Movimiento sobreamortiguado	99
Movimiento oscilatorio amortiguado	100
Energía del oscilador amortiguado	101
Capítulo 7. Torque, momento angular y fuerzas centrales	102
Torque	102
Torque y la 3ª ley de Newton	103
Momento angular	103
Teorema del torque	104
Movimiento plano en coordenadas polares	104
Un ejemplo: el péndulo simple	106
Movimiento en una fuerza central	106
Movimiento planetario. Leyes de Kepler	108
Tercera ley de Kepler y Gravitación Universal	110
Demostración de la tercera ley de Kepler para órbitas elípticas	111
Energía efectiva del planeta	112
Demostración de la primera ley de Kepler	114
Capítulo 8. Sistemas de partículas	116
Momento angular de un sistema	116
Torque de un sistema	117
Sistemas de dos cuerpos	117

Índice general

Propiedades de los centros de masas	118
Estática	121
Capítulo 9. Rotación rígida	124
Fórmula general	124
Matriz de rotación	125
Movimiento de rotación. Vectores velocidad y aceleración angulares	126
Aceleración de un punto de un cuerpo en rotación	127
Movimiento rígido general	127
Cambio de marco de referencia con rotación	128
Fuerzas aparentes con rotación	129
Efecto de la rotación de la Tierra	130
Péndulo de Foucault	131
Capítulo 10. Dinámica de cuerpo rígido	133
Tensor momento de inercia	133
Momento de inercia respecto a un eje	135
Teorema de Steiner	136
Ejes principales de inercia	137
Ejemplos de momentos de inercia	138
Movimiento con punto fijo. Péndulo físico	141
Rueda desbalanceada	143
Movimiento con translación. Cuerpo rodante	145
Trabajo y energía cinética del cuerpo rígido	148
Regla de oro de la máquinas simples	149
Movimiento en campo gravitacional constante	149
Fuerzas de marea	150
Efecto giroscópico. Trompo	152
Apéndice I. Límites y derivadas	154
Límites	154
Derivadas	156
Apéndice II. Integrales de línea superficie y volumen	159
Integral de línea	159
Integral en un plano	160
Cambio de coordenadas en el plano	161
Integral en una superficie del espacio	163
Integral de volumen cambio de coordenadas	163
Índice general	165
Índice de figuras	169
Índice analítico	172

Índice de Figuras

Fig. 1.1 Relación entre las ciencias	4
Fig. 1.2 Teorías generales de la Física	6
Fig. 1.3 Subdivisiones de la Mecánica	7
Fig. 1.4 Teorías de las interacciones de largo alcance	8
Fig. 1.5 Operaciones matemáticas con longitudes	9
Fig. 2.1 Dirección y sentido de segmentos orientados	18
Fig. 2.2 Segmentos orientados equipolentes	18
Fig. 2.3 Ejemplos de producto de un vector por un número	20
Fig. 2.4 Suma de vectores	20
Fig. 2.5 Propiedad conmutativa de la suma	21
Fig. 2.6 Propiedad distributiva	22
Fig. 2.7 Coordenadas cartesianas oblicuas	24
Fig. 2.8 Magnitud de un vector en coordenadas ortogonales	28
Fig. 2.9 Componente de un vector sobre un eje	29
Fig. 2.10 Componente de una suma de vectores	29
Fig. 2.11 Componentes paralela y perpendicular de un vector	31
Fig. 2.12 Área de un paralelogramo	31
Fig. 2.13 Regla de la mano derecha	32
Fig. 2.14 Producto vectorial por un versor	33
Fig. 2.15 Proyección ortogonal de una suma de vectores	33
Fig. 2.16 Sistemas de coordenadas derechos e izquierdos	34
Fig. 2.17 Terna de vectores	35
Fig. 2.18 Plano perpendicular a un vector	36
Fig. 2.19 Distancia entre dos rectas del espacio	37
Fig. 3.1 Partícula en movimiento	40
Fig. 3.2 Coordenada curvilínea sobre la trayectoria	41
Fig. 3.3 Ley horaria	41
Fig. 3.4 v vs. t para la curva horaria de la figura 3.3	43
Fig. 3.5 a vs. t para la curva horaria de la figura 3.3	43
Fig. 3.6 Lapso dividido en 5 intervalos	46
Fig. 3.7 Integral definida en el intervalo $[a, b]$	47
Fig. 3.8 Rectas tangentes a una curva	50
Fig. 3.9 Versor tangente	50
Fig. 3.10 Circunferencia osculadora	51
Fig. 3.11 Circunferencia en coordenadas polares	52
Fig. 3.12 Un móvil visto desde dos marcos de referencia	54
Fig. 3.13 Hélice	56
Fig. 3.14 Cicloide	57
Fig. 4.1 Marcos inerciales	62
Fig. 4.2 Suma de fuerzas	63
Fig. 4.3 Pares acción-reacción	65

Índice de figuras

Fig. 4.4 Sistema de partículas	67
Fig. 4.5 Péndulo de torsión de Cavendish	72
Fig. 4.6 Aceleración de gravedad efectiva	72
Fig. 4.7 Cohete	73
Fig. 4.8 Fuerzas en un segmento de cuerda real	74
Fig. 4.9 Fuerza de contacto de una superficie sobre un cuerpo	75
Fig. 4.10 Fuerzas elásticas	76
Fig. 4.11 Plano inclinado con roce	77
Fig. 5.1 Trabajo como integral de camino	81
Fig. 5.2 Energía potencial en 2D	84
Fig. 5.3 Resorte	85
Fig. 5.4 Componente radial del desplazamiento diferencial	86
Fig. 5.5 Gráfico de $U(x)$	88
Fig. 5.6 Dos cuerpos en colisión elástica	90
Fig. 5.7 Rampa con rizo de radio R	91
Fig. 6.1 Ejemplo de oscilador armónico	92
Fig. 6.2 Ley horaria armónica	94
Fig. 6.3 Péndulo simple	100
Fig. 6.4 Energía potencial del péndulo simple	97
Fig. 6.5 Movimiento sobreamortiguado	100
Fig. 6.6 Movimiento oscilatorio amortiguado	101
Fig. 7.1 Torque de una fuerza	102
Fig. 7.2 Área barrida	103
Fig. 7.3 Ejemplo de U_{ef} vs. r	107
Fig. 7.4 Tipos de órbita	108
Fig. 7.5 Órbita de un planeta	109
Fig. 7.6 Energía efectiva gravitacional	112
Fig. 7.7 Tipos de órbita de una fuerza $f(r) = C/r^2$	113
Fig. 8.1 Dos cuerpos con atracción gravitatoria	118
Fig. 8.2 Centros de masas de triángulos	121
Fig. 8.3 Palanca	121
Fig. 8.4 Puntos de apoyo y base de sustentación	122
Fig. 9.1 Sentido positivo de rotación	124
Fig. 9.2 Rotación rígida	125
Fig. 9.3 Movimiento rígido general	127
Fig. 9.4 Sistema de coordenadas en la superficie terrestre	130
Fig. 10.1 Momento de inercia de una masa respecto a un eje	135
Fig. 10.2 Dimensiones de cuerpos diversos	138
Fig. 10.3 Coordenadas esféricas	140
Fig. 10.4 Bailarina de ballet	142
Fig. 10.5 Péndulo físico	142
Fig. 10.6 Rueda desbalanceada	144
Fig. 10.7 Rueda en un plano horizontal	145
Fig. 10.8 Fuerzas de marea	150
Fig. 10.9 Trompo	152
Fig. AI.1 Ejemplos de límites	154

Fig. AI.2 Funciones trigonométricas en el círculo unitario	155
Fig. AI.3 Derivada de una función $f(x)$	156
Fig. AII.1 Integral de línea	159
Fig. AII.2 Integral de superficie	160
Fig. AII.3 Relación entre los diferenciales de superficie	161
Fig. AII.4 Elemento de superficie en coordenadas polares	157
Fig. AII.5 Integral de volumen	158
Fig. AII.6 Elemento de volumen en coordenadas curvilíneas	159

Índice Analítico

- aceleración, 10, 16, 43–45, 48–50, 53–58, 60–61, 63–65, 69–70, 72–73, 78–79, 89, 91, 100, 105, 110–111, 118, 126–127, 129–132.
- aceleración angular, 55, 126, 129.
- aceleración centrípeta, 53, 58, 61, 70, 72, 110, 127.
- aceleración de Coriolis, 129, 131.
- aceleración de gravedad, 69, 72, 130.
- aceleración de gravedad efectiva, 72, 130.
- aceleración de un cuerpo rotante, 127.
- aceleración escalar, 43–45, 48.
- aceleración normal, 53, 57, 91, 110–111.
- aceleración radial, 55, 105.
- aceleración relativa, 54, 55, 118, 129.
- aceleración tangencial, 53, 89.
- aceleración transversal, 105.
- aceleración vectorial, 48, 53, 70, 72, 105, 131.
- acimut, 140.
- aditividad de la masa, 64.
- aditividad del momento de inercia, 134.
- afelio, 69, 108–109, 111–112.
- amperio, 10.
- amplitud, 45, 55, 92, 94–98.
- anillo, 138.
- angstrom (Ångström), 11.
- año, 6, 11, 14–15, 59–62, 108, 130.
- año-luz, 11.
- área, 9, 31, 35, 46, 76, 103, 102, 108–109, 160–162.
- área barrida, 103, 109.
- área de la elipse, 111.
- área de la esfera, 140.
- área del paralelogramo, 31, 35, 103.
- área del rectángulo, 46, 160.
- Aristóteles, 59.
- Arquímedes, 4, 121.
- asociativo(a), 20–21, 29–30, 32.
- atracción, 7, 64, 70–72, 109–110, 114, 118, 151.
- atracción gravitacional, 7, 64, 71, 118–119.
- autovalores, 137.
- autovectores, 137.
- Avogadro, 11.
- axial, 39, 102, 126.
- axioma, 4, 15–16, 59.
- bailarina, 141–142.
- baricentro, 66, 120–121.
- base, 23–24, 26–27, 30, 34–35, 37, 39, 122–123, 125, 128, 144.
- base de sustentación, 122–123.
- Biblia, 60.
- Brahe, 108.
- brazo, 102–103, 122, 141.
- Bruno, 60.
- c (velocidad de la luz), 7–8, 16, 68.
- cambio de base, 26, 37, 125.
- cambio de marco de referencia, 54, 131–132.
- cambio de marco de referencia con rotación, 122.
- cantidad de movimiento, 66–68, 73, 90, 103, 116, 118, 121.
- cantidad de movimiento angular, 103–104, 107.
- campo 39, 68–69, 82, 84–85, 112, 119, 131, 149–150.
- campo gravitacional (gravitatorio) 69, 112, 149–150.
- categoría teórica, 5–6.
- Cavendish, 71–72.
- centro de curvatura, 51–52, 56–57.
- centro de gravedad, 66.
- centro de masas, 61, 66–69, 73, 83, 90, 116–123, 133, 136, 143, 145, 148–152.
- centro de simetría, 120.
- centro de una fuerza, 86.
- choque 66, 75, 90.
- choque elástico, 90.

- choque inelástico, 90.
 cicloide, 57–58.
 ciencia, 4–5, 13, 59–60.
 cilindro, 138–139.
 cinemática, 6–7, 10, 40, 60–61, 64, 133.
 circunferencia osculadora, 51.
 clase de equivalencia, 19.
 clásica, 6–7, 9, 68.
 CM, ver centro de masas.
 coeficiente de fricción, 75, 145.
 cohete 73.
 colisión, ver choque.
 cometa, 61, 70, 151.
 componente de un vector, 23–24, 26,
 28–31, 33, 37, 38, 48, 53, 56, 58, 68,
 72, 74–75, 78, 83–86, 89, 91–92, 102,
 105, 107, 122, 124–125, 131, 134–135,
 141, 143–144, 146, 149.
 concepto, 4–5, 39.
 concha esférica, 139, 141.
 cónicas, 114.
 conmutativo(a), 21, 29, 32, 124.
 condición necesaria de una fuerza conser-
 vativa, 85.
 constante elástica, 71, 92.
 coordenada(s), 15, 24, 26, 28, 38, 39, 51,
 66, 125, 130, 133–134, 161, 163.
 coordenada(s) cartesiana(s), 23, 26, 27, 54,
 114.
 coordenadas cilíndricas, 139.
 coordenada(s) curvilínea(s), 41–42, 51, 55,
 85, 89, 162, 164.
 coordenadas esféricas, 139–141, 164.
 coordenadas polares, 52, 55, 104, 114,
 161–162.
 Copérnico, 60.
 cosenos directores, 30, 77.
 Coriolis, 129–132.
 Coulomb, 75.
 cruz, 31.
 cuántica, 7–9.
 cuerda, 51, 63, 65, 74, 77–78, 96–98, 106,
 131.
 cuerpo libre, 60, 63.
 cuerpo rígido, 6, 15, 77, 102, 122, 124,
 126–127, 129, 133, 141, 143, 145,
 148–149.
 culombio, 10, 12.
 curvatura, 51–52, 111.
 curvatura del espacio, 16.
 cúspide, 50, 57.
 dalton, 11.
 deformación elástica, 63, 76, 92.
 densidad, 10–11, 71, 119–120, 134,
 140–141.
 densidad del agua, 11, 119.
 densidad de la Tierra, 71.
 densidad lineal, 120.
 densidad superficial, 120, 140.
 derivada, 42–44, 51–52, 55, 80, 84–85, 89,
 101, 104–105, 126, 128, 144, 152, 154,
 156–158, 162, 164.
 descomposición de un vector, 31.
 deslizamiento, 146–147.
 desplazamiento, 19, 21, 38–39, 66, 77, 81,
 84, 86, 102–103, 130, 133, 148–149,
 162.
 determinante, 25, 34–37, 39, 162.
 día natural, 14.
 día sidereal, 11, 14, 61, 151.
 día solar, 11, 14.
 díada, 134.
 diferencial, 59, 84, 86, 89, 92–93, 98, 148,
 156, 161–162.
 dimensión (del espacio), 9, 15, 17, 23, 48,
 56, 84–85, 88–89, 92, 95, 106–107, 131,
 138, 159.
 dimensiones (unidades), 9–10, 12–13, 38,
 42–43, 45, 99.
 dinámica, 10, 16, 59, 61, 64, 68, 75, 77,
 133.
 dinamómetro, 63.
 dirección, 8, 17–18, 27, 37–38, 49–51, 53,
 55, 61, 63–65, 68, 72, 75–77, 84, 96,
 105–106, 122, 126, 130, 135, 141–142,
 144–145, 149–152, 163.
 disco, 138–139, 161.
 distribución esférica de masa, 16, 71.
 distributiva, 22, 30, 33.
 ecuación del movimiento, 65–66, 78, 89,
 92, 96, 99, 105, 119, 129, 131, 141,
 143, 145.
 ecuación diferencial 89, 92–93, 98.

Índice analítico

- ecuación implícita, 25, 36, 114.
ecuación integral, 93.
ecuación lineal, 93, 97, 99.
ecuación paramétrica 25, 41, 81, 111, 159.
ecuador, 11, 72.
Einstein, 7–8, 68, 73.
eje, 11, 14, 23–24, 27–30, 38, 46, 48, 55–57, 61–62, 72, 77, 83, 92, 104, 106, 114, 120, 123–126, 130, 132, 135–145, 149, 151–153.
eje de rotación, 61, 77, 124, 126, 143–144, 152.
eje de simetría, 120, 137–138, 143–144, 152.
eje instantáneo, 126.
eje principal, 137–139, 141, 143–144, 149.
elástica (colisión), ver choque elástico.
elástica (constante), ver constante elástica.
elástica (deformación), ver deformación elástica.
elástica (energía), ver energía elástica.
elástica (fuerza), ver fuerza elástica.
elástico (choque), ver choque elástico.
elemento de arco, 160.
elemento de masa, 134, 150.
elemento de simetría, 137.
elemento de superficie, 140, 162–163.
elemento de volumen, 120, 139, 164.
elemento neutro, 21.
elemento químico, 5.
elipse, 108, 111–112, 114.
energía, 5, 9, 10–11, 80, 82–92, 94–95, 97–98, 101, 106–107, 112–113, 115, 119, 131, 148–149.
energía centrífuga, 107, 112, 115.
energía cinética, 80, 82–83, 87–88, 90, 94, 101, 106–107, 113, 115, 148. energía cinética transversal, 107.
energía de rotación, 148–149.
energía elástica, 90, 101.
energía interna, 83.
energía potencial, 82–90, 92, 94, 97, 106, 107, 112, 115, 119, 131.
energía potencial de campo constante, 83.
energía potencial de fuerza central, 86.
energía potencial del resorte, 85.
energía potencial efectiva, 107, 112.
energía potencial gravitatoria, 87, 97, 119, 131.
Eötvös, 71–72.
equilibrio, 11, 59, 63, 71, 73, 78–79, 85, 88, 92, 95, 97, 99–100, 121–123, 131.
equilibrio estable, 88, 95, 97.
equilibrio inestable, 88.
equilibrio indiferente, 88.
equipolente, 18–19.
equivalencia, 18–19, 73.
escalar, 28–29, 32, 35, 38–39, 42, 43, 48, 50, 53, 64, 80, 82, 85, 119, 123, 133, 149.
escalar impar, 39.
esfera, 16, 26, 86, 104, 131, 140–141, 163.
espacio, 6, 9, 15–16, 19, 24, 26, 37, 60, 64, 109, 117, 124, 133, 159, 163.
espacio físico, 6, 15–16, 27, 38.
espacio geométrico, 17, 19, 26, 37.
espacio vectorial, 9, 22–23, 38, 133.
estadística, 5–6.
estática, 59, 75, 77–78, 121–122.
estrellas binarias, 119.
estrellas fijas, 61–62.
éter, 8.
Euclides, 6, 15–17.
excentricidad, 113–114.
experimento, 5, 15, 61, 64, 71–72.
fase, 45.
falsificable, 5.
Física, 4–9, 11–12, 14–15, 19, 38, 59, 71, 159.
flecha, 19.
flecha doble, 134.
foco, 69, 108, 113–115.
fórmula física, 12.
Foucault, 61–62, 131.
frecuencia, 10, 14, 45, 55, 95, 97, 99, 131–132, 143.
frecuencia angular, 45, 55, 95, 97, 99, 131, 143.
fricción, 59, 65, 69, 74–79, 82–83, 90, 91–92, 99–101, 130, 141, 145–147.
fricción fluida, 76, 99.
fricción seca, 74–75, 77.

- fuerza, 6–8, 10–11, 38–39, 59–60, 63–76, 78–92, 95–97, 100–106, 108–111, 113–118, 122–123, 129–131, 133, 141, 143, 145–146, 148–151, 153.
- fuerza aparente, 65, 72, 129–130, 151.
- fuerza atractiva, 113.
- fuerza central, 86–87, 102, 106, 108–109, 115, 118, 150.
- fuerza centrífuga, 72–73, 105, 129–130.
- fuerza conservativa, 82–83, 85–86, 89, 91, 97, 106.
- fuerza de contacto, 74–75, 83.
- fuerza de Coriolis, 129–131.
- fuerza de gravedad 7, 16, 69, 72, 87.
- fuerza de marea, 150–151.
- fuerza disipativa, 83.
- fuerza elástica, 76, 90.
- fuerza externa, 60, 67–68, 73, 78, 90, 116–118, 133, 141.
- fuerza impulsiva, 66.
- fuerza interna, 67, 116–117.
- fuerza normal, 74–75, 78, 83, 91–92, 145.
- fuerza repulsiva, 74, 91, 113, 115.
- funciones trigonométricas, 155.
- g (aceleración de gravedad), 69.
- G (constante de gravitación universal), 70, 71, 110.
- galaxia, 61–62.
- Galileo, 6, 59–61, 64, 68–70, 97.
- galileano(a), 6, 8, 16.
- geocéntrico, 60.
- geometría, 6, 10, 14–17, 27, 120.
- giroscópico (efecto), 152.
- gradiente, 84–85.
- grado de libertad, 77.
- grado Kelvin, 10.
- Gravitación Universal, 8, 59, 69–71, 108, 110–111.
- heliocéntrico, 60.
- hipérbola, 113–115.
- ímpetu, 66, 90, 103, 133.
- impulso, 66, 73, 90.
- impulsivo(a), 66.
- inclinación, 42, 77, 91, 140.
- incremento infinitesimal, 42, 73, 156.
- independencia lineal, 22, 26.
- inercia, 59–60, 63–64.
- integral, 46–48, 66, 81–82, 93, 119, 141, 159–161, 163–164.
- integral de línea, 81, 159–160.
- integral de superficie, 159–163.
- integral de volumen, 159, 163–164.
- integral definida, 46–47.
- integral indefinida, 47–48.
- interacción, 6, 9, 65.
- inversión espacial, 34, 38–39.
- isótropo, 109, 117.
- Jacobi, 162.
- Jacobiano, 162, 164.
- Joule, 80.
- joule, 11, 80.
- julio, 11, 80.
- Júpiter 70, 110, 119, 151.
- kelvin, 10–12.
- Kepler, 59, 69–71.
- kilogramo, 10–11, 64.
- latitud, 14, 69, 130.
- ley, 4, 5, 10, 12, 14, 17, 59, 121.
- ley de Hooke, 76, 85.
- ley de Gravitación Universal, 70–71.
- ley de los ejes paralelos, ver teorema de los ejes paralelos.
- ley de Steiner, ver teorema de Steiner.
- ley del torque, ver teorema del torque.
- ley del trabajo, ver teorema del trabajo.
- ley horaria, 41, 43–45, 50, 89, 94.
- leyes de Kepler, 59, 69–71, 108–109.
- leyes de Maxwell, 8.
- leyes de Newton, 59, 61, 68–69, 108–109.
- ligadura, 77.
- línea de acción, 65, 102.
- litro, 11.
- Lobachevsky, 15.
- Lógica, 4.
- longitud, 9–11, 15–16, 26–27, 38, 41, 45, 51, 70, 96–97, 102, 106, 131, 160.
- Luna, 61, 65, 70, 110, 119, 130, 151.
- magnitud, 9, 17–19, 27–28, 31, 33, 63, 64, 84, 86, 90, 102–103, 106, 110, 122, 130, 133, 146–147, 149.
- magnitud escalar, 38–39, 64.
- magnitud física, 9, 10, 13–15, 27, 38, 63–64, 69, 133.

Índice analítico

- magnitud vectorial, 38, 63, 134.
- máquina simple, 122, 149.
- masa, 9–11, 16, 38, 61, 64–74, 76–80, 83, 87, 90–92, 96, 109–110, 112, 115–123, 129–131, 133–136, 138, 140–141, 143, 145, 148–152.
- masa gravitatoria, 69, 72.
- masa inercial, 64, 69, 72–73.
- masa reducida, 118–119.
- marco de referencia, ver sistema de referencia.
- Marte, 108.
- Matemática, 4–7, 9–10, 12, 15–16, 22, 46, 84, 137, 159.
- matriz antisimétrica, 125.
- matriz de cambio de base, 26, 37–38, 125.
- matriz de un tensor, 133–134.
- matriz de rotación, 125.
- matriz diagonal, 137.
- matriz ortogonal, 37, 125.
- matriz simétrica, 125, 137.
- Maxwell, 8.
- metro, 10–12, 131.
- mecánica, 6–9, 15–17, 40, 59, 61, 68–69, 74, 77, 82–83, 87–88, 108, 109, 121.
- medida, 9–11, 13, 102, 108.
- mediana, 120–121.
- medio continuo, 119.
- módulo, 19, 53, 103, 140.
- mol, 11.
- momento, 102.
- momento angular, 102–107, 109, 112, 116–118, 121, 133–134, 141, 144, 148–153.
- momento angular de un sistema, 116–118, 121, 133.
- momento angular orbital, 116.
- momento angular propio, 116.
- momento cinético, 103.
- momento de la cantidad de movimiento, 103.
- momento del ímpetu, 103.
- momento de inercia, 133–145, 152.
- momento de par, 102.
- momento de torsión, 102.
- momento de una fuerza, 102.
- momentum lineal, 66.
- movimiento, 6–7, 15–16, 40–42, 44, 50, 54, 57, 59.
- movimiento acelerado, 44.
- movimiento circular, 55, 56, 58.
- movimiento con aceleración constante, 49.
- movimiento de rotación, 54, 126.
- movimiento de translación, 54.
- movimiento helicoidal, 56.
- movimiento oscilatorio, 88, 92, 95.
- movimiento oscilatorio amortiguado, 99–101.
- movimiento oscilatorio armónico, 45, 55, 92.
- movimiento oscilatorio sobreamortiguado, 99.
- movimiento plano en coordenadas polares, 104.
- movimiento parabólico, 49.
- movimiento planetario, 7, 15, 59, 61–62, 69, 108, 110.
- movimiento rectilíneo, 6, 48–49, 53, 59–60.
- movimiento relativo, 54.
- movimiento retardado, 44, 53.
- movimiento rígido, 127, 129.
- movimiento uniforme, 44, 49, 53, 55, 58–60.
- movimiento uniformemente acelerado, 44, 49.
- Newton, 4, 6–7, 59, 66, 68–71, 108–110.
- newton, 11, 64.
- Newtoniana, 7, 16, 68.
- notación científica, 13.
- órbita, 11, 14, 69–71, 87–88, 107–115, 149, 151.
- origen, 23–24, 28, 41–42, 52, 54, 55, 61–62, 87, 92, 104–106, 110, 114, 116, 118, 124, 126, 128, 131, 136–139, 152.
- ortonormal, 26–27, 30, 34–35, 37, 54, 125, 128.
- oscilaciones pequeñas, 95–96, 131.
- oscilador armónico, 92–95, 97, 131.
- oscilador amortiguado, 99, 101.
- palanca, 121–122, 149.
- par, 102.
- parábola, 44, 49, 113–115.

- paralelepípedo, 35, 138–139, 163.
 paralelo, 140.
 paralelogramo, 18, 21, 31, 103, 161.
 partícula, 8, 9, 15, 38, 40–41, 64–68, 71,
 73, 80–83, 85–86, 88–90, 95–98,
 102–108, 116–120, 129, 133, 135–136,
 148–149.
 pascal, 11.
 patinar, 57.
 pendiente, 42, 44, 77, 156.
 péndulo de Foucault, 61–62, 131–132.
 péndulo de torsión, 71–73.
 péndulo físico, 141–143.
 péndulo simple, 96–98, 106.
 perihelio, 69, 108–109, 111–112.
 período, 11, 45, 55, 69, 70–71, 93, 97–98,
 108–109, 111.
 peso, 11, 63, 69–72, 74, 78, 83–84, 92,
 96–97, 110, 119, 122, 130, 141, 143,
 145, 149, 152.
 Pitágoras, 15, 27.
 planeta, 7, 9, 15, 59, 60–62, 69–71,
 108–112, 115, 119, 149.
 planeta extra solar, 119.
 plano de simetría, 120, 137–138.
 plano inclinado, 59, 77–78, 149.
 plano osculador, 51, 57.
 polea, 77–78, 149.
 polo, 11, 61, 72, 131–132.
 potencia, 10, 80, 101, 148.
 potencia (exponente), 12, 115, 157–158.
 potencia (fuerza), 122, 149.
 potencial eléctrico, 10, 11.
 potencial (energía), ver energía potencial.
 precisión, 11, 13–14, 73, 108.
 prefijo multiplicativo, 11.
 primera ley de Kepler, 69, 108, 114.
 primera ley de Newton, 60–61, 64, 68.
 primitiva, 47, 106.
 principio de equivalencia, 73.
 principio de homogeneidad del tiempo, 14.
 problema inverso, 45.
 producto de matrices, 26.
 producto de tensor por vector, 133–134.
 producto escalar, 28–31, 39, 80, 149.
 producto por un número, 20.
 producto tensorial, 134.
 producto triple, 35, 37, 39, 164.
 producto vectorial, 31–35, 39, 102–103,
 131, 162.
 propiedades afines y métricas del espacio,
 26.
 proyección paralela, 24.
 proyección ortogonal, 28, 33, 37, 120,
 122–123, 140.
 pseudoescalar, 39.
 pseudovector, 39.
 punto de aplicación del peso, 83, 119.
 punto de apoyo, 122–123.
 punto de contacto, 57, 122, 145–147.
 punto de equilibrio, 73, 85, 88, 95, 99, 131.
 punto del espacio, 15.
 punto de inflexión, 42–43.
 punto de retorno, 42, 44, 88–89, 107.
 punto fijo, 117, 122, 124, 126, 133, 138,
 141.
 punto material, 15.
 radio de curvatura, 16, 51, 57–58, 91, 111.
 radio de giro, 135, 143.
 rampa, 42, 91.
 rapidez, 42, 53, 56, 58, 76, 81, 88, 91, 100,
 147.
 rectángulo, 28, 46, 138–139, 161, 163.
 regla, 15.
 regla de la cadena, 157.
 regla de la mano derecha, 31–32, 39.
 regla de oro, 149.
 reglas para escribir fórmulas físicas, 12.
 relación de equivalencia, 18.
 relativo, 6–8, 15–16, 68, 75–76, 118–119,
 146.
 relatividad del espacio, 60.
 Relatividad Especial, 7.
 relatividad galileana, 6, 8, 64.
 Relatividad General, 7, 16, 73.
 relativista, 7–8, 68.
 reloj, 6–7, 14, 16.
 reloj atómico, 14.
 resistencia, 10, 59, 64, 122, 149.
 rizo, 91.
 roce, ver fricción.

Índice analítico

- rotación, 34, 37–38, 54, 61–62, 65, 77,
104–105, 124–131, 133–134, 141–146,
148–149, 152.
- rotación de la Tierra, 11, 14, 61–62,
130–131.
- rozamiento, ver fricción.
- rueda, 57, 65, 143–147.
- satélite, 61, 70, 87, 110, 119.
- secante, 42, 50, 156.
- segmento orientado, 17–19, 21.
- segunda ley de Kepler, 108–109.
- segunda ley de Newton, 64–66, 68, 70, 78,
89, 91, 104–105, 107, 110, 116, 129,
133, 145, 149, 153.
- segundo, 10–12, 14, 61–62.
- semi-eje, 11, 108–109, 111, 113–114.
- sentido, 17–20, 27, 31–32, 41–42, 44, 51,
64–65, 78–79, 84, 123.
- sentido de rotación, 61, 124, 131.
- separación de variables, 89, 98.
- sistema de coordenadas, 15, 23–24, 27, 34,
38, 40, 54, 106, 118, 130–131, 133–134.
- sistema de dos cuerpos, 117–118.
- sistema de partículas, 66–68, 116–117, 120.
- sistema de referencia, 6–8, 15–16, 40, 54,
56, 60–62, 65, 128–132, 151.
- sistema de referencia inercial, 6, 8, 16,
60–62, 64–65, 68, 118, 129–130, 151.
- Sol, 5, 14, 60–62, 64, 69–71, 95, 109–111,
113, 119, 130, 149, 151.
- solar, 7, 11, 14–15, 60–61, 69–70, 108–110,
151.
- SR, ver sistema de referencia.
- SRI, ver sistema de referencia inercial.
- suma de vectores, 21–23, 26, 29, 33.
- superficie equipotencial, 84, 86.
- tangente, 42, 50–51, 53, 56, 74, 122, 156,
160.
- teorema, 4, 15, 21–22, 60, 122.
- teorema de los ejes paralelos, 136.
- teorema de Pitágoras, 15, 27.
- teorema de Steiner, 136.
- teorema del torque, 104, 106, 117.
- teorema del trabajo, 80, 148.
- teoría, 4–8, 15–17, 59, 68, 73, 75, 108, 131.
- tensión, 74, 77, 78, 96–97, 131.
- tensor, 133–134, 136–137, 141, 144.
- tercera ley de Kepler, 69–70, 108–111.
- tercera ley de Newton, 65, 68, 103, 109,
116–117.
- termodinámica, 6, 10.
- terna, 35, 39, 54, 128.
- tiempo, 6–12, 14–16, 38, 40–46, 54–55, 66,
68, 73, 80–82, 89, 92, 95, 99, 103, 105,
108–109, 114, 126, 128, 130, 147–148.
- Tierra, 11, 14–15, 60–63, 65, 69–72, 87,
110, 119, 130–131, 151.
- Tolomeo, 60.
- tonelada, 11.
- torque, 39, 102–106, 109, 116–117, 119,
121–123, 133, 141, 143–146, 148–152.
- trabajo, 80–83, 91, 97, 102, 148–149, 160.
- transformación lineal, 133.
- translación, 38, 54, 56, 60, 65, 77, 108,
111, 116, 127, 129–130, 133, 145–146,
148–149.
- trayectoria, 40–41, 49–51, 56–57, 60, 81,
85, 89, 91, 96–98, 106–107, 111, 113,
127.
- triángulo, 16, 22, 28, 120–121, 123.
- trompo, 152.
- unidad, 9–13, 27, 42–43, 45, 63, 64, 80,
102–103, 119.
- unidad astronómica (UA), 11.
- unidad de masa atómica (uma), 11.
- valor, 9, 10–12, 41, 45, 69, 71, 75, 81–82,
87, 107.
- valor absoluto, 12, 16, 28, 41–42, 149, 162.
- vatio, 80.
- vector, 14, 17, 19–39, 48, 50–57, 63, 65–66,
69–70, 75, 77, 85, 102–103, 117,
124–128, 130, 133–134, 137.
- vector perpendicular a un plano, 36.
- vector unitario, 27, 31, 33, 51.
- versor, 27, 29–30, 33, 38, 50–52, 54, 75–76,
104–105, 124, 126, 130, 137, 143–144,
160.
- versor radial, 55, 104.
- versor tangente, 50–51, 56.
- versor transversal, 55, 104.
- velocidad angular, 55, 57, 61, 98.
- velocidad angular (vector), 39, 126–128,
130–133, 141–144, 146–147, 151–153.

velocidad areal, 103, 109, 111.
velocidad de escape, 87.
velocidad de la luz, 7–8, 11, 68.
velocidad escalar, 42, 48, 50, 53.
velocidad instantánea, 42.
velocidad media, 38, 42.
velocidad radial, 104–105, 114.
velocidad transversal, 61.
velocidad vectorial, 38, 48, 53.
Vía Láctea, 61, 105.
vínculo, 77–78, 104, 131, 144, 146.
viscosidad, 76.
voltio, 11.
volumen del paralelepípedo, 35.
Watt, 80.